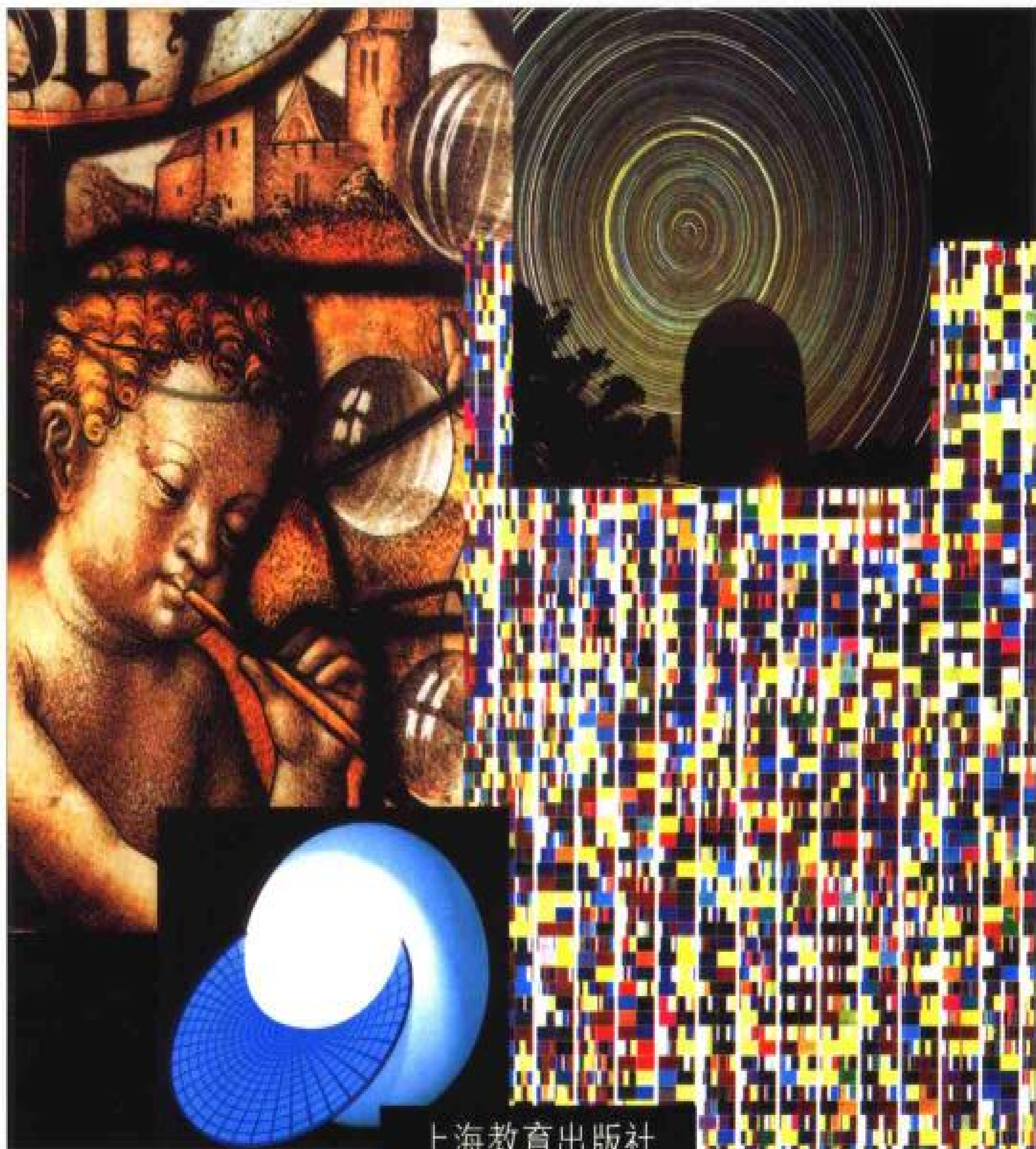
怪怪宇宙

自然界里的形态和造型

斯特凡·希尔德布兰特
安东尼·特隆巴 著

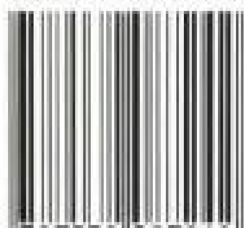
沈 蓓 译



上海教育出版社



责任编辑　叶中豪
封面设计　陆　弦



ISBN 7-5320-8724-7
9 787532 087242 >
易文网：www.ewen.cc
定价：（软精）58.00 元





怪怪宇宙

自然界里的形态和造型

斯特凡·希尔德布兰特
安东尼·特隆巴 著

沈 菴 译

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

悭悖宇宙：自然界里的形态和造型／（美）希尔德布兰特等著；沈葹译．—上海：上海教育出版社，2004.2
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-8724-7

Ⅰ．悭… Ⅱ．①希…②沈… Ⅲ．数学－通俗读物
Ⅳ．O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第007130号

悭悖宇宙
——自然界里的形态和造型

斯特凡·希尔德布兰特
安东尼·特隆巴 著

沈葹 译

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网：www.ewen.cc
（上海永福路123号 邮编：200031）
各地新华书店经销 上海中华印刷有限公司印刷
开本850×1156 1/16 印张21.5 插页4
2004年2月第1版 2004年2月第1次印刷
印数1-7000本
ISBN 7-5320-8724-7/O·7 定价：（软精）58.00元



手托肥皂泡的爱神丘比特，由伦勃朗(Rembrandt)绘制．此画由瓦杜兹城堡的冯·利希滕施泰因(von Liechtenstein)大公收藏．

为纪念里查德·库朗（Richard Courant）而作

缪斯的魔力

冯·科夫*得知：

有一位远房堂姐乃是“女巫”，

她从草汁泡沫里，

造出点点星辰无数。

从此，科夫匆匆忙忙，

是啊！他赶忙向奥－德－李－德－利兹奔赴，

为的是见到

那位魔力无比的女巫。

他找到女巫呆在茵茵绿地，

与其家园相去无几。

他问女巫是否吹制星星，

出自渺渺泡沫堆里？

又问女巫是不是

来自奥－德－李－德－洛姆的仙姬？

唉呀！千真万确，

她竟就是天国里的一位仙姬！

她赠予科夫

麦秸一支、草汁一坛。

科夫吹气，

朦胧中微光一闪。

瞧！一个天衣无缝的美妙圆球，

在幽幽太空中膨胀，至大无边；

宛若所见之宇宙，

却只不过是泡沫和梦幻。

---

* Von Korf.

星星脱去柄蒂，
　　缓缓地飘向上苍；
溶入球面音乐，
　　轻柔地上浮，扶摇直上．
天国的圣歌，
　　是那样的悦耳悠扬；
牧羊人的风笛吹起，
　　声调却激越高昂．

面对这个世界的圆满镜像，
　　科夫深感有趣、喜哉乐乎；
注视着自身世界的美妙，
　　他张嘴结舌，叽里咕噜．
种种幸运乐事，
　　全都填入他的心窝；
其最佳最优者，
　　更令他走火入魔．

留神啊留神！
　　入了魔的科夫先生．
他尊称堂姐为"缪斯"，*
　　被人用汗巾曳紧；
为了某种目的，
　　被人带上遥远征程；
绑着离开奥－德－拉－德－莱斯特，
　　向着新开辟的领土挺进．

---

* Muses，希腊神话中司文学、艺术、科学等的九女神．Muse，泛指女神．

前言

自然界为什么呈现某些确定的形态，为什么这些形态比其他一些可想像的形态更为优越？自然万物的种种造型和种种形态既相似、又多变，其缘由何在？

本书旨在解释这些疑问，就是说明变分法——调排几何学和自然界里的最佳形态，即处理极大、极小问题的一个数学领域.我们可以考查自然界里的一些令人注目的实例，其形态和图像甚为规则；对此首先在序文里予以阐述.

希腊语中mathema一词，意指知识、认识、理解、感知，这使人联想到，数学研究始于三千年之前，正是为了探求世间这些疑问的答案.我们描述的历史断面显示了数学发展的大部分情况，这是一种企图理解自然而得到的成果.无论如何，数学不只是其他科学的仆人.正如卡尔·弗里德里克·高斯（Carl Friedrich Gauss）所说，把数学知识用于数论，还是用于说明一团物质（诸如行星）的运动，倒并无关碍.

在整个历史上，数学家们总是追寻与社会相关抑或无关的自身观念，总是醉心于自身发现中的美妙和对数学问题的解答.1830年，数学家J·雅可比(C.G.J.Jacobi)写道，科学的目的仅仅为了给予人类心灵以荣耀.考虑到科学的正反两面，除了如下所述者之外，似乎没有其他方式令人毫无异议地接受这种陈述；如开普勒（Kepler）所为——把科学的终极目的当作对上帝的颂扬，此乃凭藉于承认形象化描述："上帝已这样设计、创造了世界，使它最好、最美、最像上帝自己".不管可以如何看待数学的目标和价值，我们总希望

前 言

读者确信，数学是人类文化的一个必要部分.

我们并不利用使近代数学变得如此有效而富于功力的数学公式和数学记号. 对于职业数学家，公式和记号是必不可少的；广泛的训练需要掌握数学语言——一种在非专业读者看来似乎是不可思议、十分生疏的语言. 乔纳森·斯威夫特（Jonathan Swift）在其《格列佛游记》中描绘勒皮他国王的宫廷时嘲笑了一个由数学家们控制的社会：

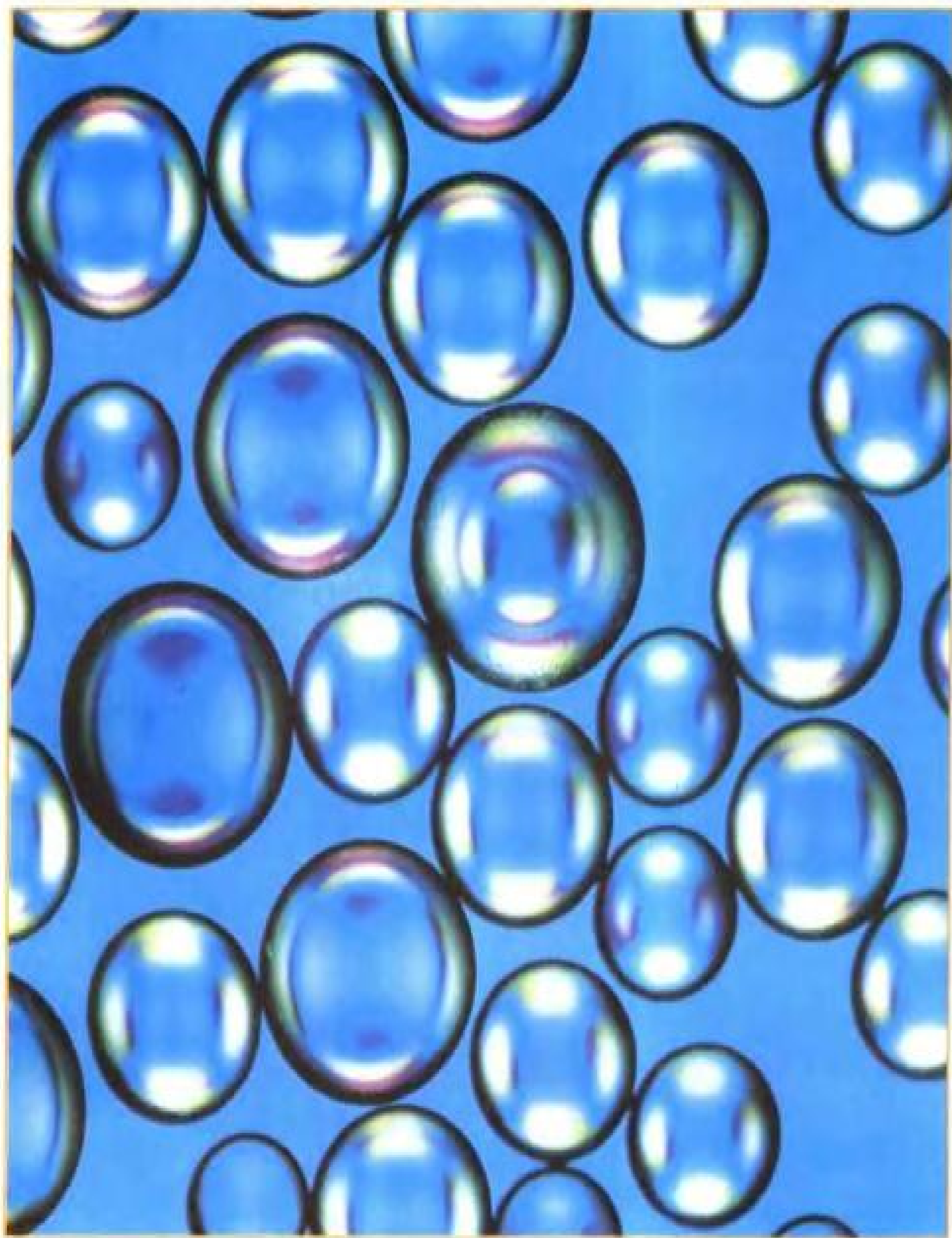
> 我的数学知识对于学习他们的用语颇有助益；这些用语与科学和音乐十分相关，而我对音乐并不陌生. 他们的思想永久地系于线条和图形之中. 譬如他们若要赞扬一位女士或其他什么动物的美妙，就总是用菱形、圆形、平行四边形、椭圆形和其他几何术语，或者用源于音乐的艺术名词加以形容，这里无需赘述了. 我在御厨房里看到种种数学仪器和乐器，他们就按照这些器具的图形将大块肉切好，供奉到国王的餐桌上.

本书是由弗里曼（W.H.Freeman）原先于1948年出版的《数学与最佳形态》的修订增补本. 原版翻译成法文、德文、荷兰文和西班牙文的版本相继面世. 在本修订版中增添了许多新的图画，并重新绘制了原先的一些插图.

（感谢语略）

斯特凡·希尔德布兰特（Stefan Hildebrandt）

安东尼·特隆巴（Anthony Tromba）



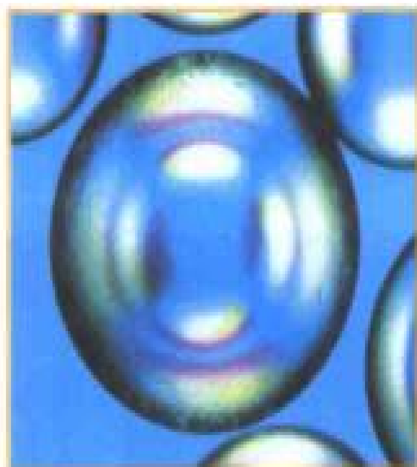
巴洛蒂尼（Ballotini）球.

目 录

目录

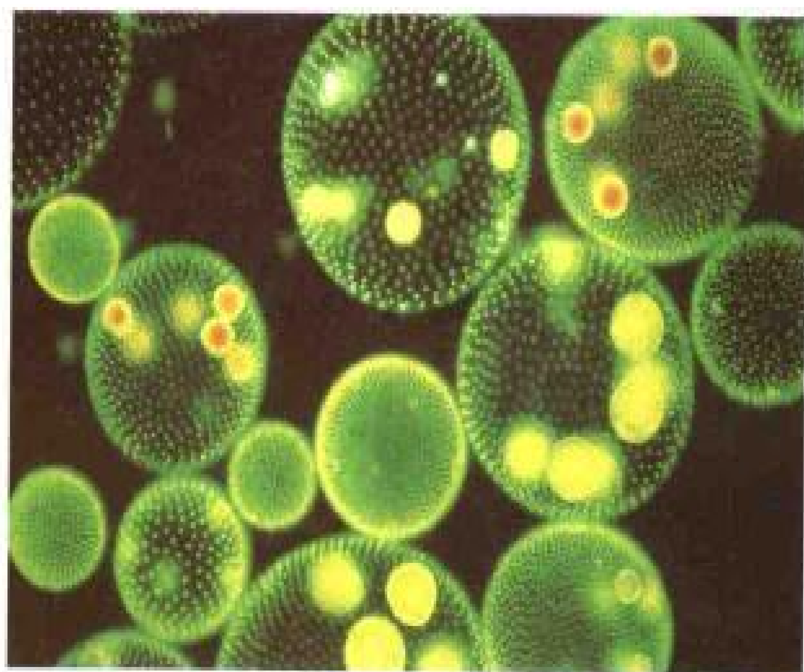
序文

论形态和造型

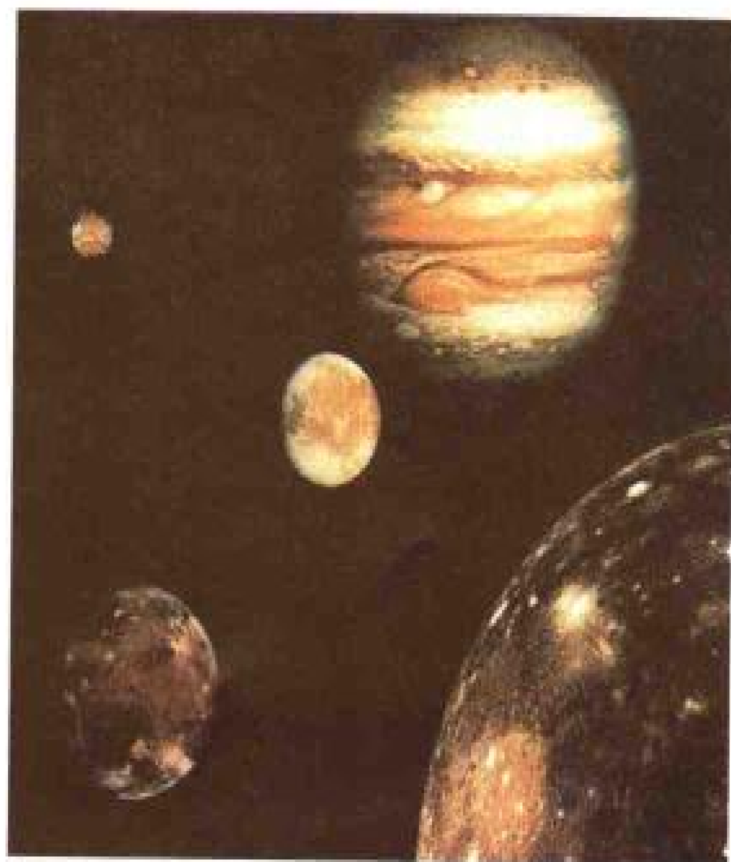


自古以来，圆形和球形被当作几何学中的完美形态．在希腊人看来，它们是人类心灵之终极和谐性的象征．就行星而言，难道会有比圆周运动更合适的永恒运动形式吗？希腊人因此而相信，天空中的行星必定沿着完美的圆周运动，尽管各行星可能依次沿着不同的圆周行进．希腊哲学家克塞诺芬尼（Xenophanes，约公元前565—前470年）除去公众信奉的群神，代以唯一至高无上的上帝，并赋其球形特征．亚里士多德（Aristotle）这样描述克塞诺芬尼的思想：

鞭毛虫是靠一根或几根鞭毛运动（微小的抖动）的单细胞生物体，某些种类的鞭毛虫独居而生；另一些则可形成群集，团藻即形成为相当大的群集，每个球形群集的表面可能包含20 000个单细胞，每个细胞带有一根鞭毛，团藻群集能使这许多鞭毛的运动有条不紊，从而群集得以转动，确实，漂亮的球形就是由这种鲜黄色团藻——一类海洋浮游生物——所呈现。



木星及其四个卫星，最近的卫星是艾（木卫一），远一点的是尤罗帕（木卫二），更远的是甘尼米德、卡里斯托（木卫三、木卫四），这些卫星由伽利略（Galileo）所发现，除了这四个之外，至少还有十个小得多的卫星绕着木星运转；并有一微弱的粒子环流围绕着木星。



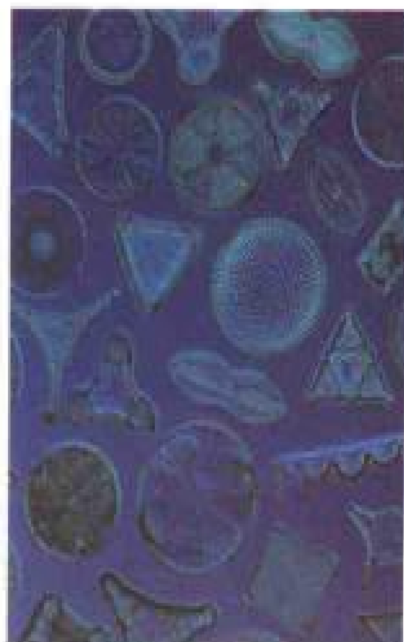
上帝主张，如果他是最好的，就只可能是唯一的一个；而倘若有两个或更多个上帝，则就不再是最好的和最强大的一个，因为这多个神中的任意那一个对各自的等级都有同样的主张。实际上，上帝及其神力，即意味着独占优势，意味着万物之最，意味着不可超越……因此，只可能有唯一的一个上帝；他四面八方而观皆为同一，无论何处同样看到、听到、感觉到他。否则，不同地方就会互为优劣；这是不可能的。所以，上帝的这样一种普遍均匀性，便暗示着他具有圆球形状……因为上帝拥有万物，独一无二，永恒无穷，并且他均匀同一、滚圆如球，故而他既非有限、又非无限，既非静止、又非运动。

而今，圆球形态还如对古希腊人一般地逗人喜爱。我们赞赏孩童吹出的肥皂泡那样美妙的滚圆形状。巴洛蒂尼球——薄玻璃球——都具有绝无瑕疵的一样球形，很久以来一直被用于威尼斯制造的玻璃镶嵌工艺品之中。团藻属的绿色鞭毛虫形成的球对称性群集十分奇异。同样，我们太阳系的行星及其卫星也近乎圆球形状。

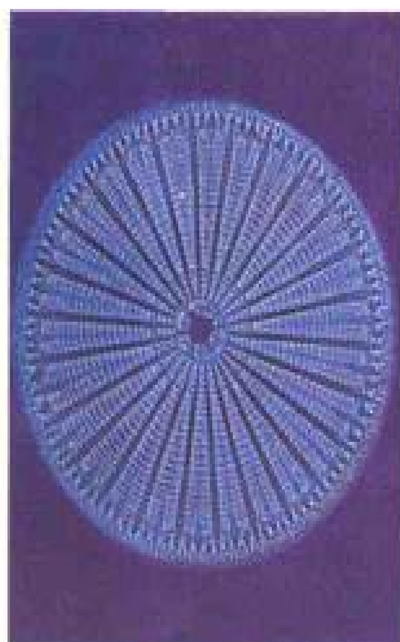
形成球形的力也能形成附图所示的硅藻(是单细胞水藻)群集的形状。此乃显微镜显示的典型标本。硅藻群集由呈各种精致的几何造型的硅质甲壳接合而成。

自然界中一大类奇异形态由肥皂膜和肥皂泡所产生。对此，后面读者将看到，三片肥皂膜彼此总会相交成120°的角，不管它们由金属丝张成还是系于玻璃板之间。

从下一页的左下图看到系于两块平行的玻璃板之间的肥皂膜。所看到的膜像一些直线；显然，此乃膜的边缘。这表明肥皂



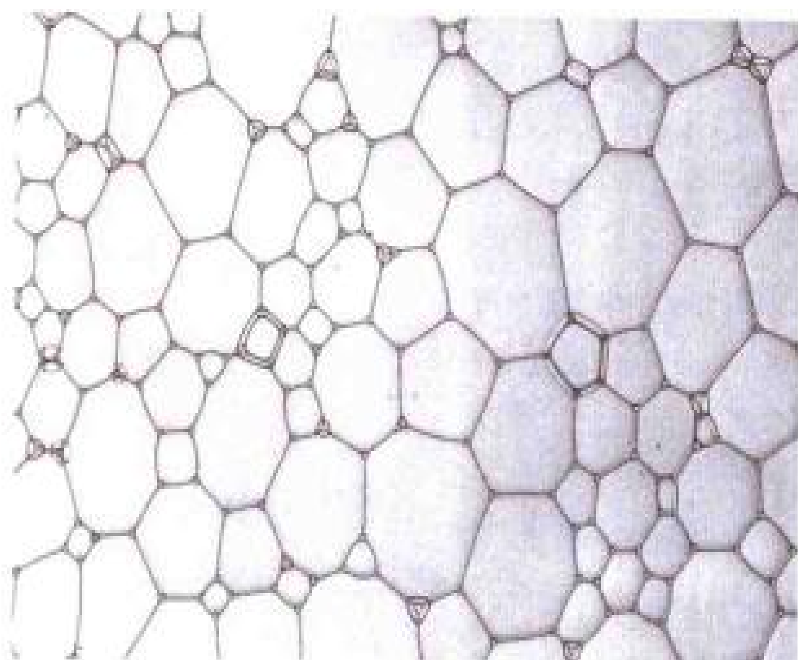
硅藻之骨架，都像有底有盖的盒子.



这种蜘蛛网状的USA组成一漂亮的圆盘形构架，它往往适用于哥特式建筑窗户的图案装饰.



显微镜显示因硅藻的支撑和拱起而呈现的丝网状结构，细胞质穿透其间.

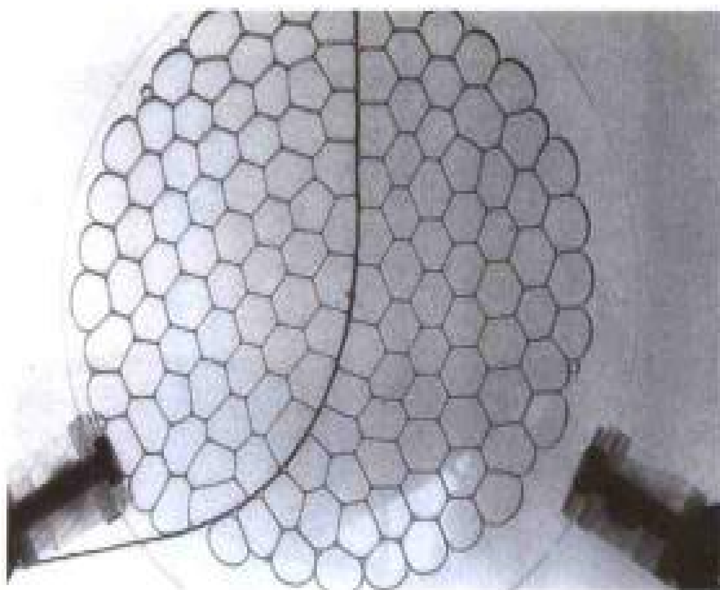


两块平行的玻璃板之间的肥皂膜. 注意到典型的Y形是由三片薄膜交成. 某些元胞以弯曲的薄膜为边界面；此乃邻接元胞的压力不同，致使薄膜凸出.

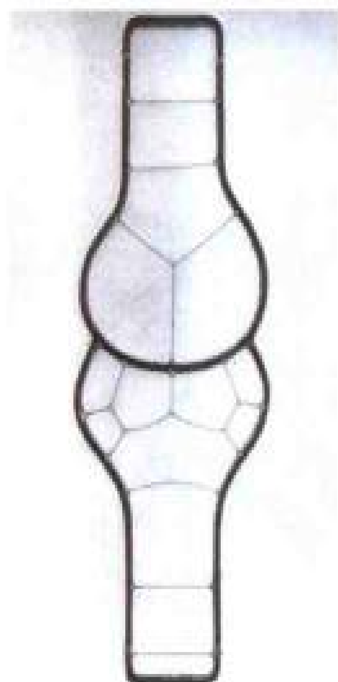


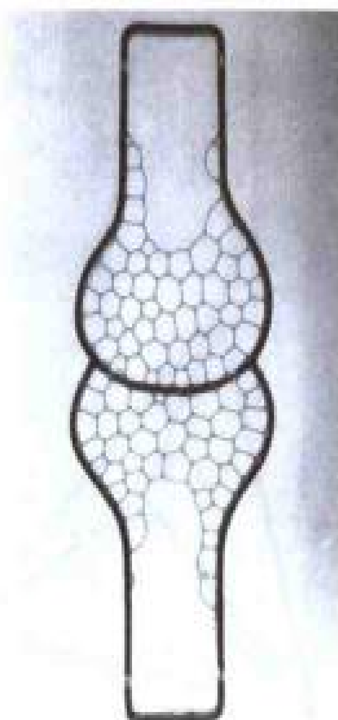
以八面体的十二条棱边为边界的肥皂膜体系.

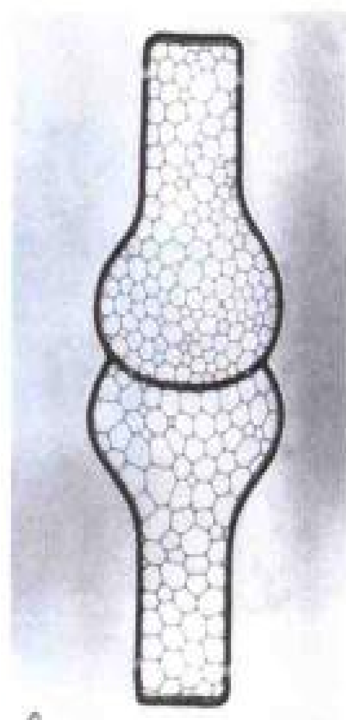
膜与两块玻璃板垂直地接触. 一旦膜可自由地在维系表面组织其边界, 就会形成这种直角. 例如, 肥皂膜与金属条的侧面(见下图粗黑线的边缘所示)形成90° 夹角; 然而膜本身, 彼此交成120°.



两块平行的玻璃板之间的肥皂膜沿着金属条侧面(粗黑线)形成90° 夹角.

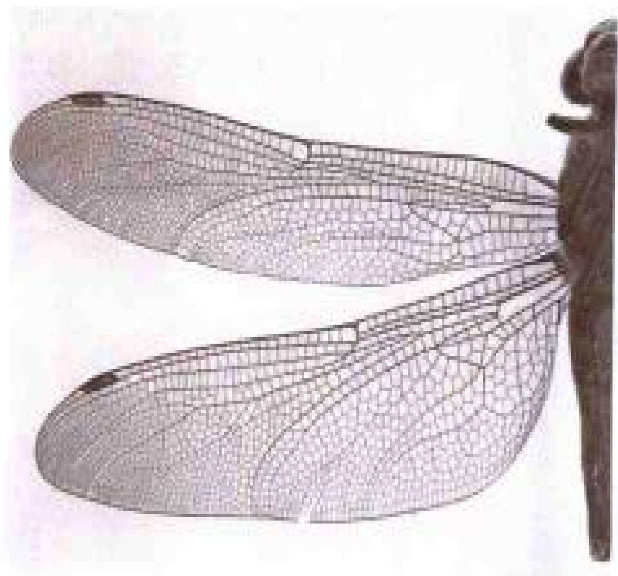




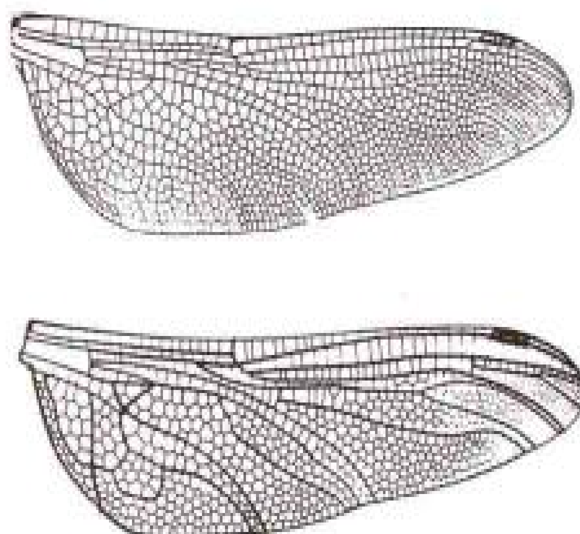


用肥皂膜体系模拟骨结构.

察看昆虫的翅膀以及蜂窝的元胞，知其与肥皂膜相类似．察看由多面体构架张成的肥皂膜体系与某些属于所谓放射虫类的单细胞动物的相似性，也是颇为迷人的．

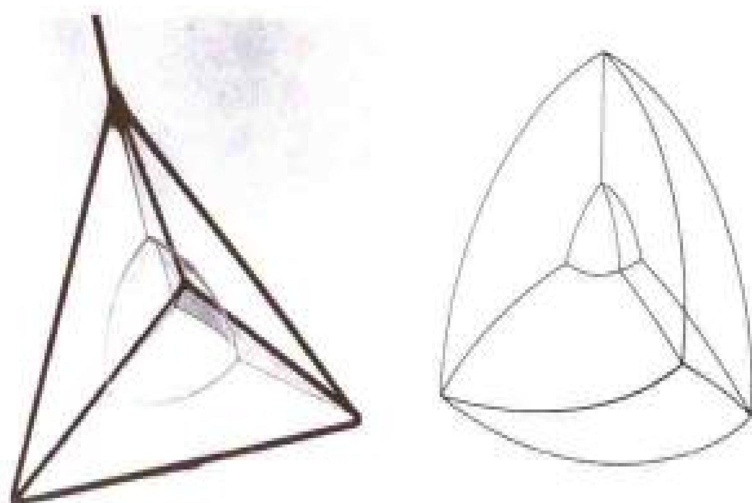


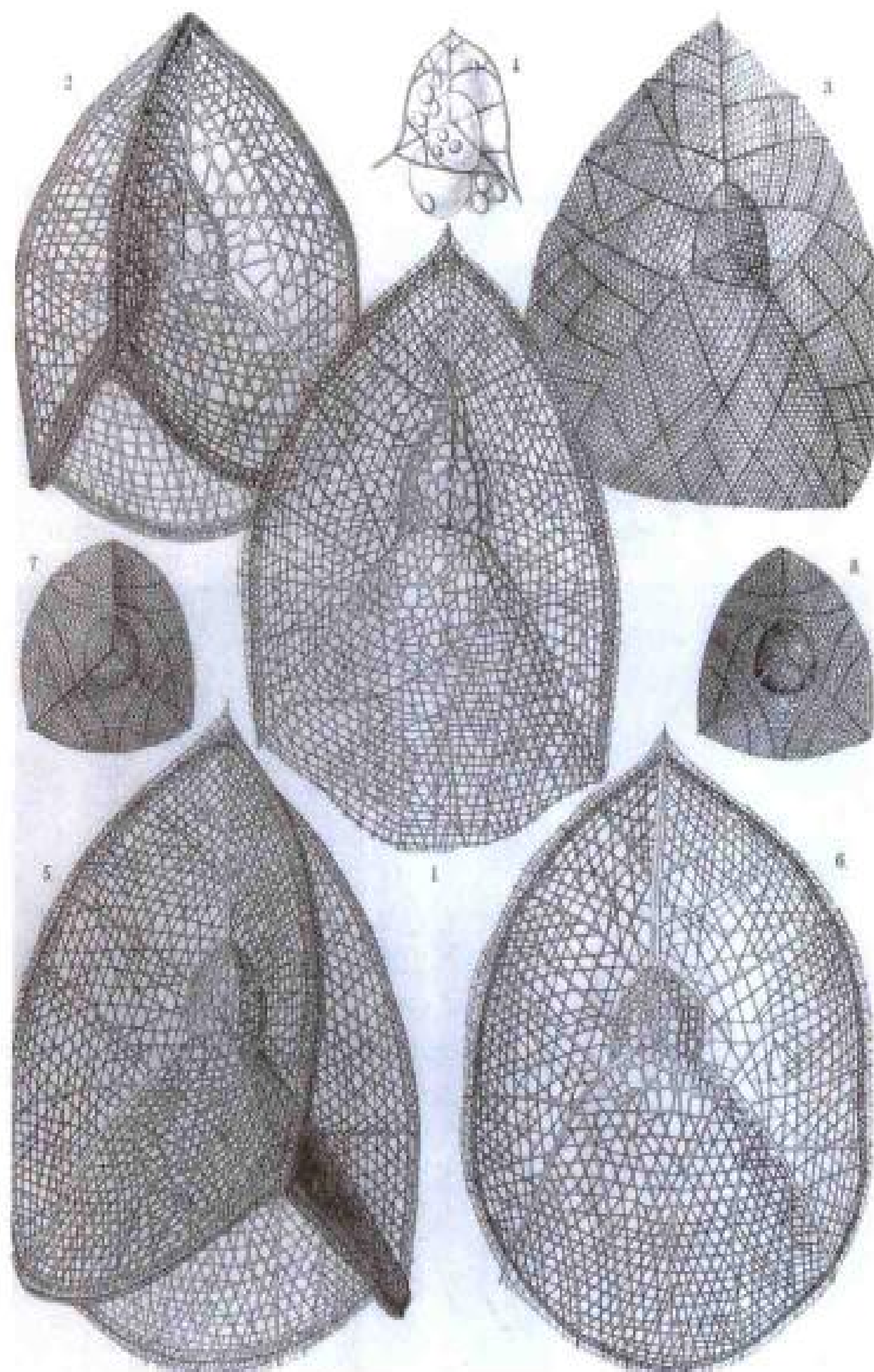
（A）一种飞龙蝇的翼．



（B）飞龙蝇翼（上）可以用一个合适的构架（粗线所示）上的肥皂膜体系来模拟．

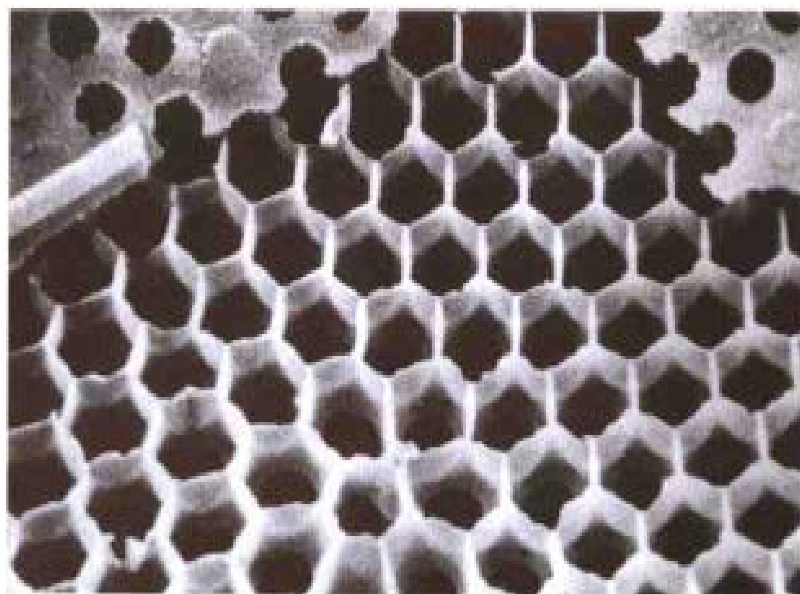
六片平直肥皂膜和一个肥皂泡组成的体系，由一个四面体悬挂着．这样的体系类似于下一页所示的属于放射虫类的美冠虫的构型．

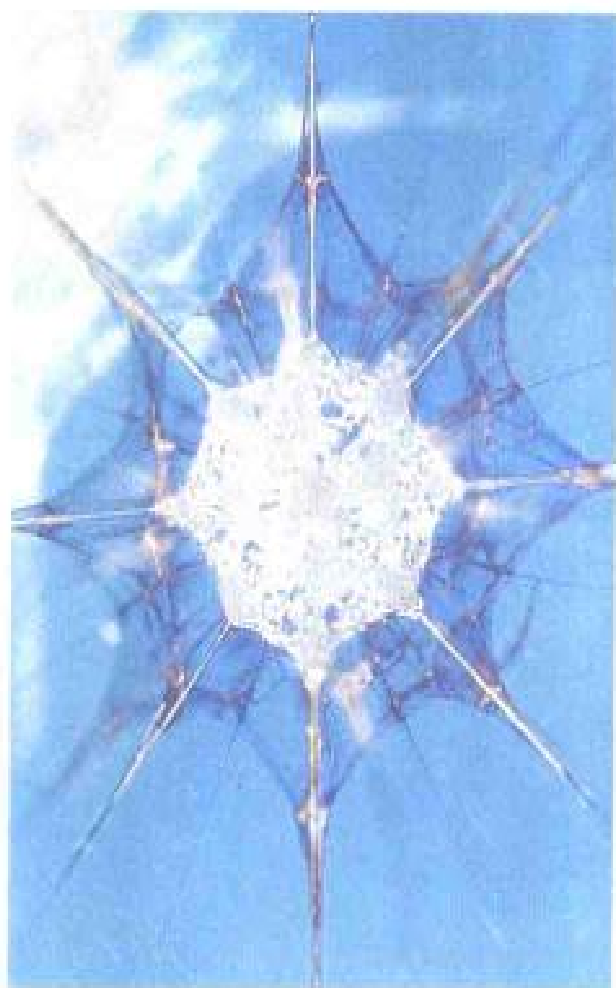




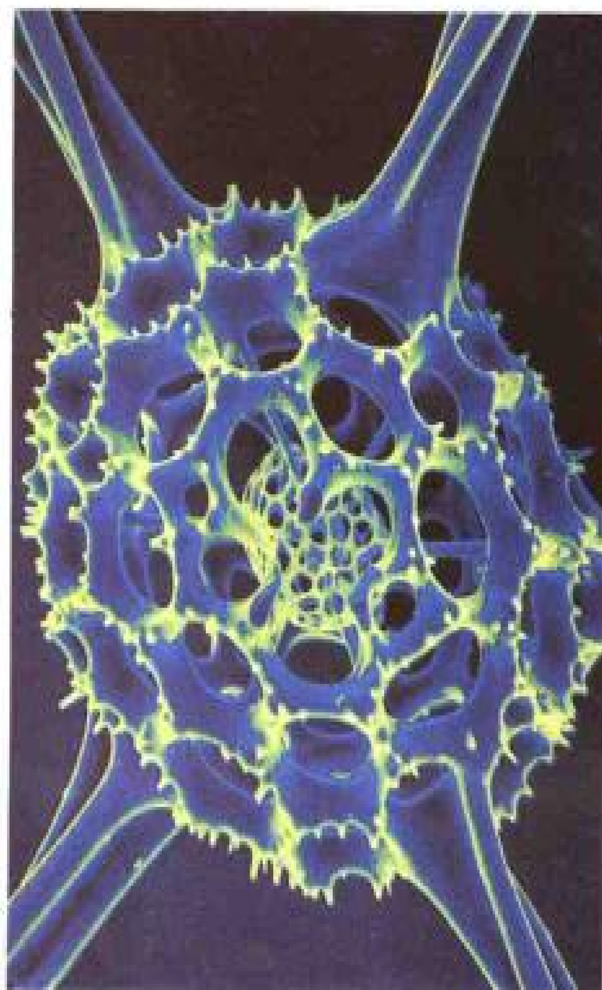
由德国生物学家恩斯特·黑克尔（Ernst Haeckel）绘制的名为美冠虫的放射虫之骨架. 其形状类似于由六片平直肥皂膜及其所托起的一个肥皂泡组成，它由一个四面体构架悬挂着.

肥皂膜中的Y形连接方式常常在自然界里见到，可由以形成不断重复的六边形图案，像蜂窝的元胞（或曰蜂巢的小室——巢室）那样.





一个活着的放射虫，黑克尔描绘了这样的微小生物有739属，4 314种.



放射虫的骨架.



带有折射光环的水滴.

有一种现象与肥皂膜和肥皂泡的关系密切，此即水滴的形成；它使我们心情激动，想起花瓣上布满露水珠儿的诱人景象.

玫瑰花上的清新晨露，
灿烂的阳光何忍轻拂.

莎士比亚(Shakespeare)在《爱的徒劳》中这样写道.

然而有些现象引起人们不愉快的想像和反感，诸如冰和干土的龟裂、碎裂及其裂缝，所显示的图像与肥皂膜颇为相像. 我们看到，在物质裂缝交叉点，裂缝交成90° 角或120° 角.

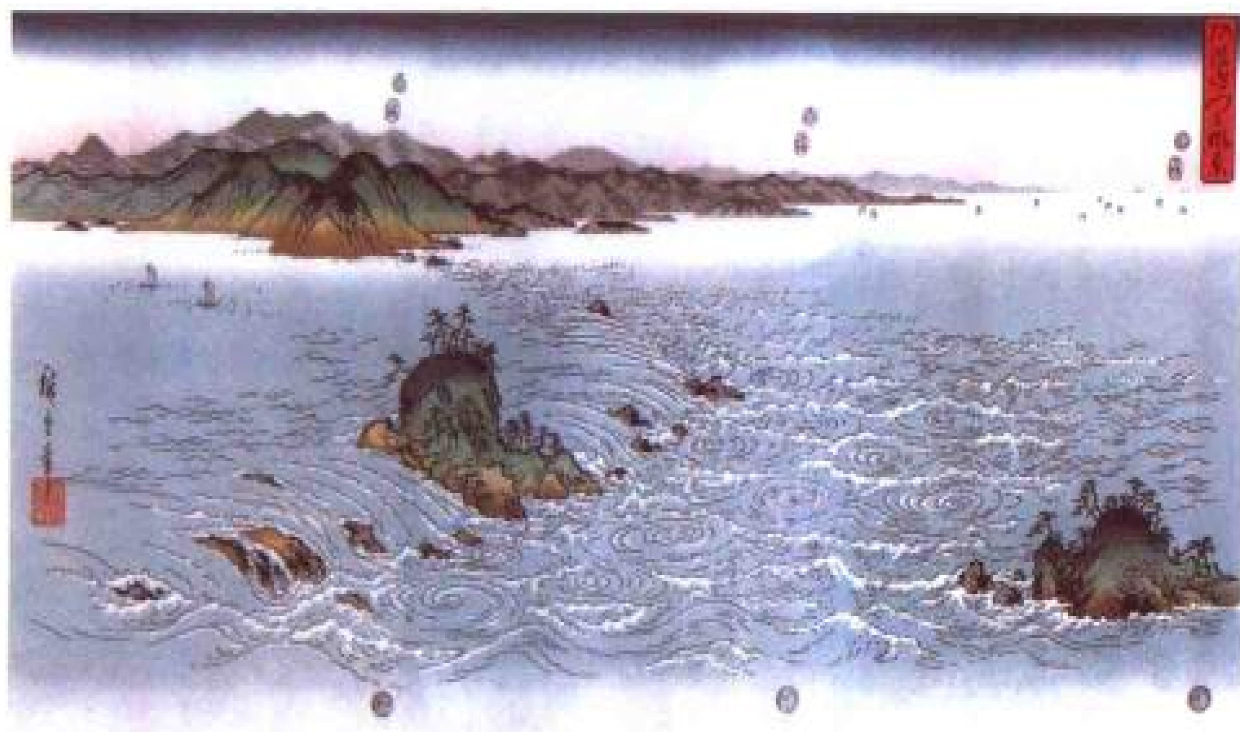


这是一幅农田的鸟瞰图吗？不，这是凝成胶状的听装油的缝隙图。

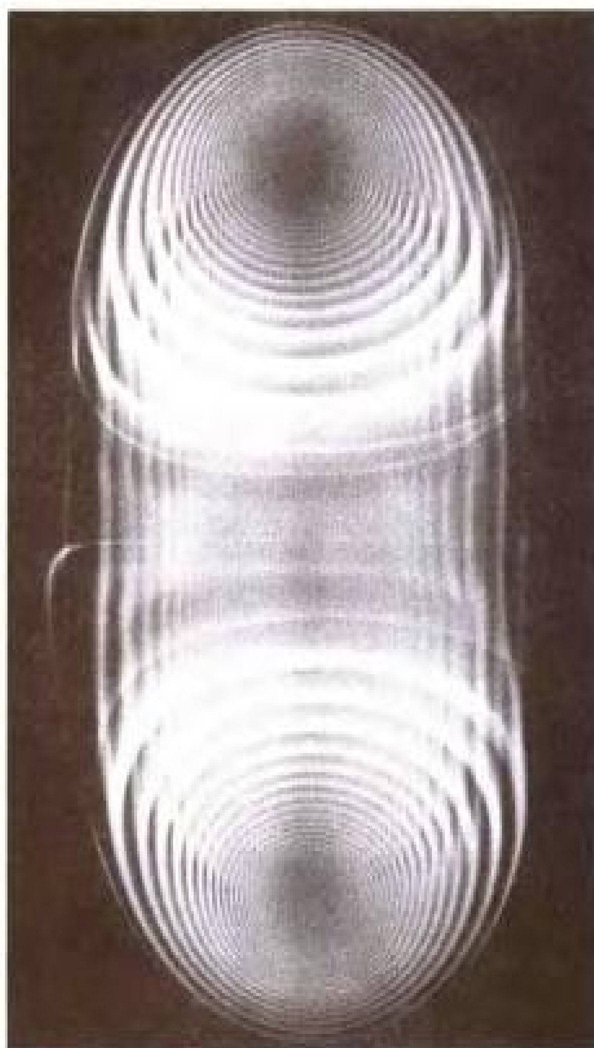
我们还被种种连续变化的现象围绕着. 每天看到日升日落, 我们的祖先亦是如此. 晴朗的夜空, 还能看到月亮和星星. 和风吹拂, 划破了湖面, 或者激起海面浪花. 一些现象遵循着简单的规律, 而另一些现象似乎是按复杂的、或甚至是随机的、混沌的方式显示. 谁敢预报遥远将来的天气或预言旋风的路径? 但即便是旋涡, 也呈现一定的规则性. 大工程师西奥多·冯·卡门(Theodor von Kármán)给出了所谓"卡门旋涡径迹"之绝妙的数学描绘. 旋涡的形态有时可从剧烈运动的液体或气体中看到. 这样一种旋涡径迹, 由日本的一位画家歌川广重绘制在如下这幅木刻画中.



冯·卡门旋涡径迹.



日本鸣门湖面的旋涡(由歌川广重绘制)



烟圈.

从管子喷射出来的烟圈显现一种令人惊异的结构图像. 其实, 并非真正的圆圈, 而是紧密回旋、类似于螺旋的形式. 真正达到宇宙规模的旋涡乃星系, 例如下页所示的盘旋星云即是.

自然界造就一些玄妙的结构, 观之使我们想起一位古代佛教徒所写的那段话:

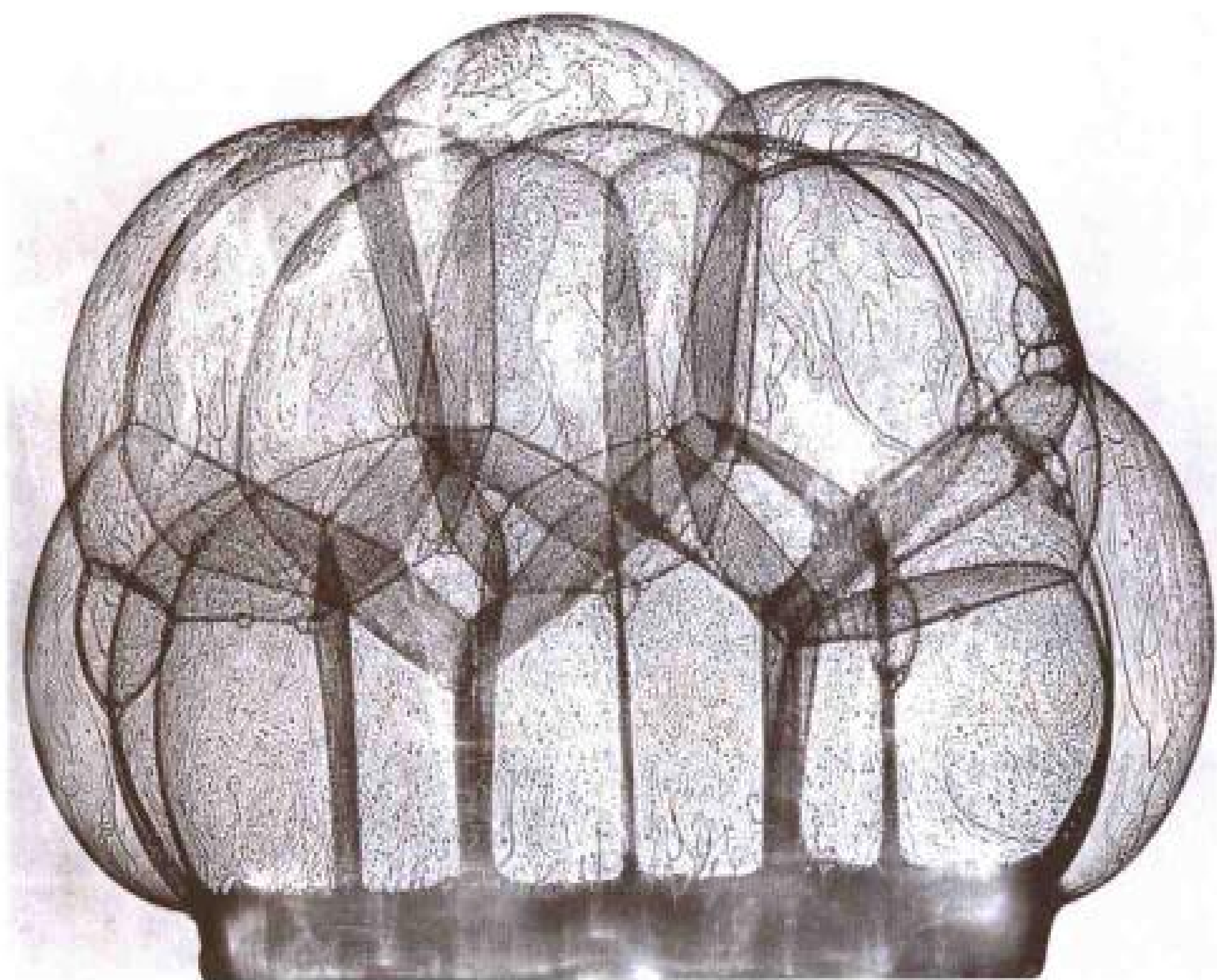
……菩提萨埵按照事实了解, 形态不过是孔洞和缝隙, 又确实像一团气泡, 就其本性而论是没有硬度或坚固性的.



魔鬼的柱桩：玄武岩墩组成的一火山的岩石龟裂图景.



猎犬星座中的旋涡星系.



气泡漂浮子.

对于自然界的布局而言，孔、缝、泡就是其全部的构件?是否如此，只要看看我们周围世界，便可注意到形态的对称性或图像的规则性，似乎混沌中也有一定的秩序. 这秩序启示：我们应该去寻找具有种种结构的形态后面的某些简单的普适规律. 为什么自然界宁愿采取这种或那种形态，而不采取其他可以想像的形态?为什么天体看来像球，而不像立方体或棱锥体?（自然界并不讨厌诸如立方体和棱锥体那样的多面体结构，这一点是从晶体形态中得知的.）我们可以进一步问：为什么浮在肉汤面上的油滴呈圆形，而非三角形（像某些硅藻那样）?



铝晶体.



钯晶体.

我们确实并不奢望找到这些问题的最终答案：似乎没有可能. 大部分科学家已经放弃不断追求其圆满答案、获得其最终真相的期望. 转而，他们愿意阐明其所能阐明的一些原理，预言在给定的场合自然界所宁愿采取的形态、而非别的形态. 谨慎地接近于对复杂问题的理解，已导致科学的许多进展.

纵观历史进程，人们试图去发现这样一些原理，令人着迷的是考察如何用这种方式去增进对自然的理解。为认识自然，一个理论接着一个理论被发明出来。阿尔伯特·爱因斯坦（Albert Einstein）指出科学理论得以发展的两个缘故：

> 一旦遇到不能用原有理论"解释的"新事实，就绝对需要有新的理论。但可以这么说，促使提出新理论的这一动力并非十分强大，此乃从外面施予的。还有别的动机，其重要性未必更小：这就是出于理论作为一个整体，对其前提之同一性和简单性的追求。

对简单性的追求，符合了大多数艺术家、工匠、工程师和科学家皆有的一种观念：你可能做的事情，就是你能简单地做的事情。所谓"方法的经济原理"，从字面上讲，只是一个美学概念罢了，乃确信：简单地做的事情必然是做得最好的；但从而也就导致这样的观念：自然界按最简单、最有效的方式演进。

爱因斯坦也论及过人们要求用简单而有魅力的概念去理解自然，这些概念把人们对自然的感觉与思想的逻辑体系关联起来：

> 具有求知的激情，就如具有热爱音乐的激情一般。这种激情常见于孩童，但大部分人成年后就失却了求知欲。倘若没有这种激情，就不会有数学，也不会有自然科学。对求知激情已一而再地导致一种错觉：人们能够以纯粹的思维理性地认知客观世界，而无需依靠经验基础；简言之，就是仅凭藉玄学去理解世界。我相信，每个真正的理论家都是无生气的玄学家；但不管如何他却自认为是纯粹的"实证主义者"。玄学家确认，逻辑简单性高于经验事实之上，但一切感觉经验的全体可以依据基于以纯粹简单性为前提建立起来

> 的概念体系而被"理解". 怀疑者会说，这是一种"令人不解的信条"；虽然的确如此，但该信条已因科学的发展而加强到惊人的地步.

没有人会感到惊奇：数学对于这样的概念体系的进展已发挥并将继续发挥重要的作用；此概念体系显然是使人们得以系统地阐述、并正确地利用自己对物理世界各种现象之见识的唯一工具. 英国物理学家狄拉克(P.A.M.Dirac)以如下方式表述了这一事实：

> 用十分优美而有效的数学理论描述物理学基本定律，这看来是自然界的一个基本特征；为了理解自然，便需要高水准的数学. 你或许会疑惑：自然界为什么循着这些方式而构成？只能这样回答：我们目前的知识似乎表明，自然界就是如此构成的；对此我们已经完全接受了. 或许可用下面的说法描述这种情况：上帝是等级很高的数学家，他将很高等的数学用于构成宇宙. 对于数学研究的初步尝试，使我们能够理解宇宙；进而，随着把数学发展得愈益高等，则可望更好地理解宇宙.

本书涉及某些被用以解释世界的形态和运动的理论. 读者将看到，这些理论是如何发生的，数学在其进展过程中发挥了怎样的作用. 尤其是，我们将强调方法的经济原理，它始终被用作了解物理现象的主要工具. 我们的目标是找到数学与物理学之间易于理解的联系；提供此联系的数学理论称为变分法. 在巴罗克式风格和洛可可式风格的时代，即从17世纪末到整个18世纪，亦即近代科学发展的早期，变分理论的基础得以奠定，它与物理学的连接关系被人们所设想. 因此，我们将通过对当时一些数学观念和哲学观念的思考来开始本书的阐述.



皮埃尔－路易·德·莫佩蒂（1698—1759年），穿戴北方服饰，以庆祝其北极考察的成功．

1 宇宙万物的总体模式



凡多余者，皆为上帝和自然所厌恶；

凡为上帝和自然所厌恶者，皆与灾祸为伍.

［但丁·阿利吉耶里（Dante Alighieri），约公元1300年］

纵观悠悠历史，人类总是探究着物质世界的种种规律以描绘其纷纭现象．然而长期以来，没有人提出一条能主宰一切现象的普遍规律；直至1744年，法国科学家皮埃尔－路易·莫罗·德·莫佩蒂（Pierre-Louis Moreau de Maupertuis）提出所谓宇宙的总体模式，后来即被称之为最小作用量原理．1746年，他出版一精致版本以展示他的思想，书名为《由形而上学原理导出的运动和静止的定律》．

自然界里的作用量和经济原则——莫佩蒂原理

莫佩蒂的"形而上学原理"乃是如此假定：自然界的行为总是遵循最大可能的经济原则．例如，在均匀介质中，光沿着尽可能短的路径行进．他出于这样的假定，得出以普遍原理表述的如下结论：

> 倘若自然界发生某种变化，其作用量对于这种变化必定取尽可能小的值．

假定使自然界消耗得如此节约的这个"作用量"是什么东西呢？

设想一旅行者徒步街上，且考虑如何描述他的作用量．如果他在1小时里走了2千米路，你或许会说，他所付出的作用量是2小时走2千米时的两倍；但你或许还会说，2小时走2千米的作用量是1小时走1千米的两倍．可见，旅行者在1小时里走2千米的作用量却是1小时走1千米的四倍．

按直觉，把作用量定义为距离、速度以及质量的乘积：

$$作用量 = 质量 \times 距离 \times 速度．$$

其中的质量计及旅行者的行李．而且，依照莱布尼兹（Leibniz）的观念，动能E由下式给出：

$$E = \frac{1}{2} \times 质量 \times (速度)^2；$$

那么，作用量的物理量纲与

$$能量 \times 时间$$

相同，因为速度是距离除以时间．这样，就得到了一个关于作用量的定量定义；倘若要给出利用作用量概念的自然规律之数学表示，其定量定义是必需的．这个作用量表式被莫佩蒂所采用，而且由莱布尼兹已偶尔提及过．事实上，我们上述诱导作用量定义的推理过程还是源自莱布尼兹的一封书信[1]．很可能是莫佩蒂从伯努利（Bernoulli）家族——瑞士一数学家大家族——之一员处得知这消息，该家族从1690年起定居巴塞尔城，从而那里就成为当时世界的数学中心．也可能是莱布尼兹最早系统地阐述过莫佩蒂那条伟大的形而上学原理．这里可把该原理陈述为：

自然界总是使作用量减到最小．

莫佩蒂从这条原理中看出上帝的智慧；按此，自然界的每件事情都是以最经济的方式实现的．他写道：

> 考察包括涉及宇宙间一切物体的运动和静止的原理在内的这些定律，人们在精神上得到满足，从而证明主宰世界的上帝是存在的．

后面将解释作用量原理如何能用于理解序文中所提及的美妙形态和优雅图像．但这里我们应首先探索当时导致最小作用量原理的哲学观念和科学观念．莫佩蒂是如何导出自然界凭借最小作用量而变化这个观念的？莫佩蒂所很好掌握的这一条原理只不过是精确科学的一种基础吗？看看这条心理上的原理如何渗入物理学，乃是十分有趣的．不久，我们将转到巴洛克时代的晚期年月，将描写那时数学的和物理学的基本观念．读者将

[1] 莱布尼兹致约翰·伯努利，1696年3月．


戈特弗里德·威廉·莱布尼兹（1646—1716年）.

看到，那时哲学的、数学的和物理学的概念是如何发展的，又如何合并成宇宙的一个集中体现于最小作用量原理的巨大模式；同时也就能概览那个令人迷惘的时代.

先定的和谐：莱布尼兹哲学

戈特弗里德·威廉·莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz)是巴洛克时代最有影响的人物中的一位，他是外交官、哲学家、数学家、科学家，是知识渊博、多才多艺的学者. 他的哲学观念表述于1710年发表的论述*神正论*的随笔：《论上帝的仁慈、人的自由以及罪恶的起源》之中. 是他开发出这样的哲学观念：我们的世界被组织成所有可能形式的世界之中最好的一个. 18世纪前半期，这种哲学在教育圈内广为人知，并有众多的支持者；其中最有影响的可能是德国哲学家克利斯蒂安·沃尔夫（Christian Wolff，1679—1754年）. 莫佩蒂受了莱布尼兹的一定影响；虽然前者的一些基本哲学观点与后者——这位伟大的学者颇有差异.

让我们来考察莱布尼兹的某些观念. 他从事于神正论研究乃凭藉这样的思考：假定有一个万能的、无所不知的、无限美好的造物主（上帝），又如何能与他的创造物所具有的缺点相洽.

对于莱布尼兹的理论，我们可用极为简化的形式表述如下：上帝有时像一个不灵活的制钟工人，并不干预世界事务，而只是调整他那只钟的指针. 但相反，上帝以*先定的和谐*方式创造了世界. 那么，上帝又像一个悉心料理时钟的熟练的制钟工人，使他的世界之每一部分的性质，永远与所有其他部分的性质相协调；从而世界的一切部分相互之间总是完全和谐的. 唯此才是上帝——这个最理智的全能者的杰出

之处.

按照莱布尼兹的看法，上帝是存在的，其理由为：上帝是这样的神：具有其品位最高之一切性状，并且这些性状只能联合共存. 此条件是必需的，因为某些性状，诸如至高无上与无所不能二者不可能完全共有. 上帝的神圣限制他达到全能，因为上帝若凭藉其全能制造罪恶，则与他的神圣不相调和. 这种情势使得上帝会设想各种可能的世界，但他想要的乃至愿意造就的仅为所有可能世界中最好的一个.

一切可能世界中最好的这个世界之所以存在，乃是上帝存在的结果. 因此，任何其他世界必然比我们的世界不完美；但又不可否认有许多罪恶和偏私——过失和罪恶总是存在的. 而且，莱布尼兹还证明，没有过失和罪恶的世界是不可能的.

最可能的世界是以这样一种方式产生的：在自由与必然之间、在上帝的恩赐与自然力所能及的范围之间，存在着先定的和谐. 作为世界之缔造者的上帝和作为宇宙之主宰者的上帝是完全一致的. 莱布尼兹十分明白，我们这个世界只不过是可能的世界中的最佳选择，比起我们所期盼的还很不理想. 然而，公众把莱布尼兹的观点曲解，致使他的思想过分地简单化为：凡存在的都是好的.

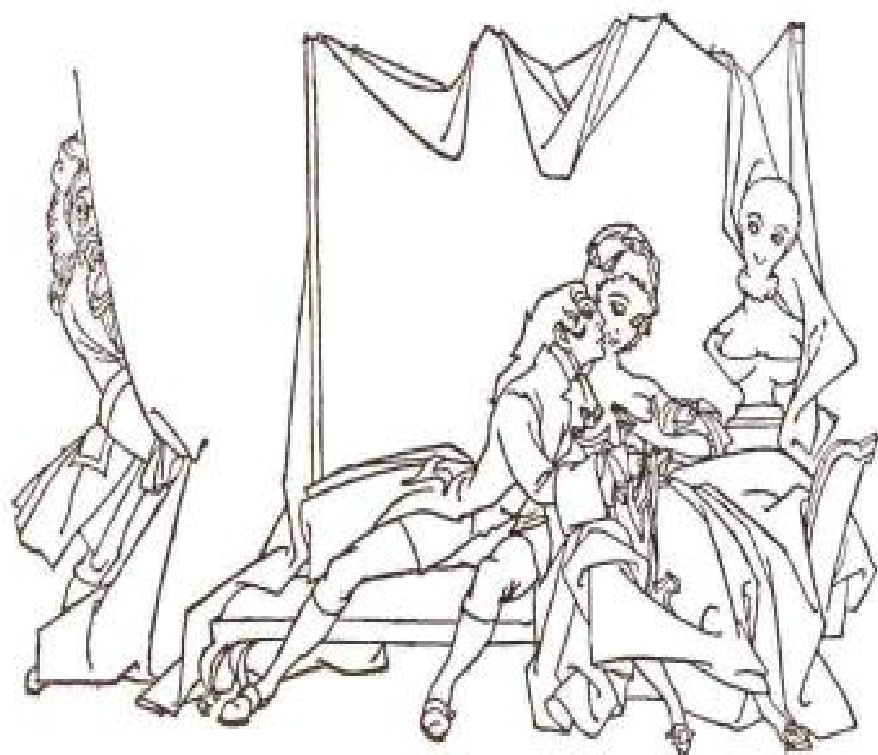
如果你不觉得我们的世界处在很好的状态，你会赞成莱布尼兹的几个同时代人的主张，必定赞成法国哲学家伏尔泰（Voltaire）的主张. 他在1758年写了一本针对莱布尼兹哲学的讽刺小说，题为“老实人，或乐观主义者”. 该书风靡欧洲，二十年中出现四十二个版本. 书中主角为：哲学家邦葛罗斯，他乃男爵的年轻女儿居内贡的家庭教师；男爵森·坦·托隆克，他在威斯伐尼有一座城堡；以及邦



伏尔泰（1694—1778年）.

格罗斯的忠实信徒"老实人"，他乃这个高贵家族的私生子．这三个人经历了一些颇为惊险的奇遇．下面，让我们转向伏尔泰的撰述：

> 邦葛罗斯在男爵府里教玄学、神学、宇宙学．他以无可争议的方式证明了天下事有果必有因，又证明了在这最美好的世界上，男爵的城堡是最漂亮的宅邸，男爵夫人是最美好的贵夫人．
>
> 他说："能够证明，天下事皆有定数，既然万物皆有归宿，这归宿自然是最美满的归宿．试看，鼻子是长出来戴眼镜的，所以我们有眼镜．两条腿长出来是穿长袜的，所以我们有长袜．石头是让人凿出来盖造房屋的，所以我们的爵爷就有了一座美丽无比的城堡．威斯伐尼最有地位的男爵理当有最宏伟的宅邸．再则，猪是生来供人食用的，所



在森·坦·托隆克的城堡考查因果关系．

以我们终年受苦痛，谁要是说，一切皆善——这毫无意义；应该说，一切俱佳。"

但事实恰如想像的那样，从而并未增强我们对邦葛罗斯之断言的信赖。老实人被赶出城堡，因为居内贡想体验一下与他之间的因果关系；于是他加入保加利亚军队，经历了保加利亚人对阿巴尔人（代表普鲁士人和法国人）之战的恐怖。

出战的是两支从未见过的上好军队，都训练有素，显示出雄壮、整齐的气派。那由喇叭、横笛、双簧管、军鼓和大炮合奏齐鸣的音响，令地狱里的音乐黯然失色。大炮的轰鸣先是把各方的军队轰倒六千兵士左右；接着一阵排枪又替这最美好的世界清除了九千到一万名沾污地皮的坏蛋；最后刺刀杀红又证明了另外数千人死亡的"充分原因"。一下子，阵地上横下了三万多具尸体。老实人吓得直打哆嗦，便在这场勇猛的杀戮中到处躲藏不迭。

战事完结，双方的国王却各自在营里叫人高唱感恩颂主的赞歌以庆祝这触目惊心的胜利。老实人承受不住了，决意换个地方去推敲他的因果关系。他从已死的和将死的人堆上爬过去，进入一个邻近的村子。那是阿巴尔境内的村子，已被保加利亚人依照国际公法焚毁。

真是灾祸连连：森·坦·托隆克城堡也荡为平地，里面的人或者被杀，或者被撵走了。居内贡因船只失事而来到里斯本，最终成为一个不贞洁的女人。其时，老实人和邦葛罗斯正好在经历了1755年10月1日发生的骇人地震之后来到里斯本。地震中有三万名男人、女人和孩童在瓦砾堆下丧生。

第二天，老实人和邦葛罗斯有幸在瓦砾堆里找到一点吃的，……得到他们救护的一些居民邀请用餐，算是大难

后最好的一餐了，宴餐间一片凄凉，同宫人边吃边哭．邦葛罗斯安慰大家，说此乃定数：

"这一切都表明世事的必然，火山原本在里斯本，而不是在别的什么地方，物之所在，不能不是，因为世上万事俱佳．"

1762年，即《老实人》初版问世后第三年，该书被列入天主教文献的索引．然而伏尔泰将其付梓出版时，谨慎地署上笔名；当全欧洲都在发笑时，他却竭力否认自己是作者．

显然，最小作用量原理最早至少是被当作哲学思想之始源．那个时期像是引出一部悲喜剧．而则，对于欧洲这个很大的娱乐圈，伏尔泰射出一支支利箭，矛头所向，是针对莫佩蒂；对于后者，其伤害颇大．可是，在我们讲述这一段故事之前，想先用极普通的语言描述一下最小作用量原理所藉以建立的那个数学领域．

变分法的发端

在17世纪最后的三四十年中，数学领域里出现了一项重要的进展．牛顿（Newton）和莱布尼兹分别独立地创造了微积分．这种数学理论使人们得以计算平面图形的面积或物体（例如酒桶）的体积．该理论还给出藉以定义运动物体的瞬时速度和瞬时加速度的精确概念，并提供能由物体的速度和加速度确定其运动轨迹的计算技巧．计算面积或体积，与确定物体的运动及其速度或加速度，看来是很不同的问题；但出乎意料，彼此有紧密的联系．古代的科学家已经尝试着去解决这样的问题，除一些特例之外都失败了．尤其是，他们还没有如何定量地定义物体的瞬时速度的想法；可是，若要描述抛射体、甚至行星的运动情况，此定义是必需的．牛顿和莱布尼兹的微积分理论，提



雅各布·伯努利（1654—1705年）. 由尼克拉斯·伯努利（Niklaus Bernoulli）绘制（1694年）.



约翰·伯努利（1667—1748年）. 由赫特（J.J.Haid）按哈勃（J.R.Huber）的画制版（1740年）.

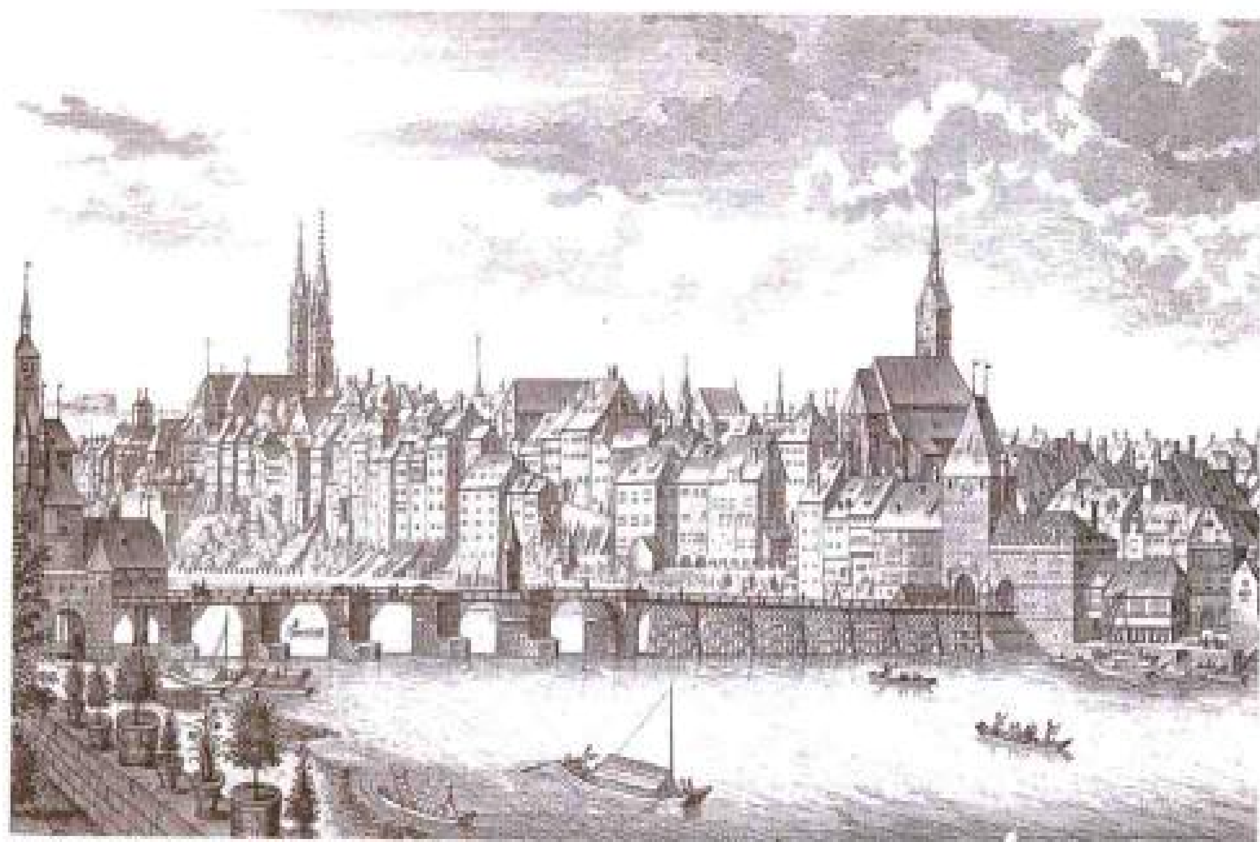
供解决涉及空间和时间的复杂问题以有效的数学方法，于是该理论成为现代科学技术的数学基础. 例如，上一世纪巨大的数学研究成就正乃奠基于微积分理论，若无此成就便控制不了太空飞行.

然而，希腊人发明了一个不甚简单、但相当有效的方法，所谓周转圆（外摆线）理论，藉此描绘了月亮或行星的轨道和运动情况；这对于古代科学水准来说还是颇为得当的. 这是一个纯几何学理论，用以解释了行星的轨道形状以及行星沿着轨道有节拍地运动的情况. 遗憾的是，对于该理论，因时时计及由更精确的观测所发现的附加的异常效应，而须予以修正.

微积分发现后不久，另一个新的方法发展起来，后来即谓之"变分法"而被人们所知. 这个新领域的开拓者是三位驰名世界的瑞士科学家（都住在巴塞尔城）：雅各布·伯努利（Jocob

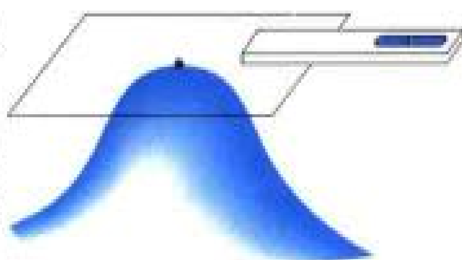
Bernoulli）和约翰·伯努利（Johann Bernoulli）兄弟，以及约翰的学生莱昂纳德·欧拉（Leonhard Euler）．欧拉成为18世纪最著名的数学家．数学的这个新科目的研究目标与上述的哲学观念密切相关，乃是致力于探索一些最理想的课题的数学描述，并发明解决这些课题所需之数学技巧．

像任何人一样，数学家对某些问题很感兴趣．在日常生活中人们经常要解决如下问题：怎样的情况"最好"或"最坏"；哪个物体具有某种性状达到"最高程度"或"最低程度"；使愉快、成功或收益达到最大、抑或使不快、失败或损失达到最小的"最佳"策略是什么．对于规定了内部体积的汽车，采取怎样的形状，使其所受空气的阻力为最小？对于快艇的艇身，采取怎



伯努利时代的巴塞尔城，其前景为莱茵河上的大桥．由赫里伯格（W.Herrliberger）按比歇尔（E.Büchel）的画制版（1761年）．

样的形状，使其行驶得最快？对于给定了内部体积的房子，又采取怎样的式样，使其表面积尽可能最小，以保证热量散失得尽可能最少？（最后一个问题的答案可能帮助你减少暖气帐的付款数）爱斯基摩人很久以前就已找到了答案：最理想的房子式样是圆顶式的，即采取半球形的屋顶.）



用水准仪寻找山顶.

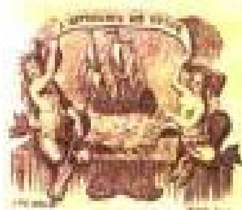
变分法理论由伯努利兄弟、由欧拉所发展，再由伟大的法国数学家约瑟夫·路易·拉格朗日（Joseph Louis Lagrange）对于种种问题着手系统地研究. 这个数学理论的基本观念是容易掌握的，虽然将其用于处理特殊问题时往往十分复杂.

假定你身处黑暗中的丛岭. 你想找到山顶但只有一个小的手电筒和一个水准仪，那怎么办呢？起先，你或许会想到，山顶的切平面是水平的（见右上图），而山谷的最低点或鞍点处亦然；然后你可以绕着圈子走走，用水准仪在各处试试，以寻找其地面水平、即具有水平切平面的地点. 假如这片山区从地质学上看来是很古老的，地面亦就很平坦，没有石块，有的是一些峰巅. 原则上说，你能用这种方式找到所有的峰巅. 然而，你也可能找到具有水平切平面的其他地点，譬如小山路或山凹处，你可以借以走向某一个山顶. 其实，没有人真的会采用这种方式寻找；但如此考虑表明你利用了切平面概念，在原则上就可能解决这个问题. 数学家如何确定极大值和极小值的位置，首先乃藉助于把涉及最好事情或最坏事情、极大限度或极小限度的一些问题，归结于寻找数学意义上构成的“山区”里的“山峰”或“山谷”这样一个几何问题. 但是一般这并非三维世界里，而是“高维”空间中的“山脉”. 这听起来很玄妙，譬如没有人能够想像一个七维空间，更不提及无限维空间；但这样的模拟空间是被赋予数学家的专业性结构，因为他们要用统一的方法去研究看来很不一样的各种问题.



约瑟夫·路易·拉格朗日（1736—1813年）.

ELÉMENS
DE LA
PHILOSOPHIE
DE NEUTON,
Mis à la portée de tout le monde.
Par Mr. DE VOLTAIRE.



A AMSTERDAM,
Chez Etienne Ledet & Compagnie.
M DCC. XXXVIII.

伏尔泰论述牛顿物理学的书（1738年）的卷首页.

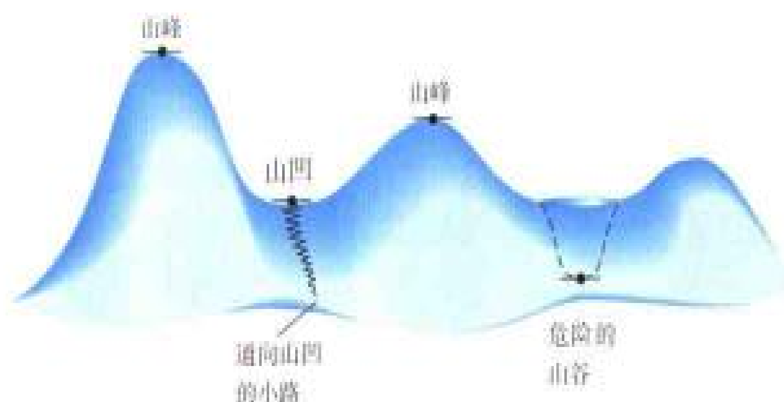
MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;
Par M. de la Grange, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.



A PARIS,
Chez la Veuve Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques.
M. DCC. LXXXVIII.
Avec Approbation et Privilège du Roi.



拉格朗日的《分析力学》（1788年）之卷首页.



山峰、山谷和山路.

数学家们已从专业上学会处理这样的空间，尽管他们通常只能见到三维空间中的山脉.

于是，数学家在策略上把注意力集中于少数几点——猜想是极大值或极小值的少数几个点（峰点或谷点）上. 这种做法类似于侦探的行动方式，他把一切可能有的旁证归于几个可能犯罪的嫌疑犯身上.

从“水平切平面原理”出发，数学家建立了一组微分方程（称为欧拉－拉格朗日方程），然后企图求解之；所探寻的最佳状态须满足这组方程. 求出该方程的解通常并不容易，需要具备一些数学知识，所以这里就不再讨论其技术性细节了.

牛顿力学

行文至此，我们仅论述了作为最小作用量原理之起源的那些哲学观念和数学思想. 但是该原理用于分析复杂问题时，莫佩蒂对其所提出的陈述形式显得过分含糊. 欧拉和拉格朗日把这条原理作了详细的阐解，使其完善化，并成为物理学的一个

必不可少的工具. 众口交誉的拉格朗日之杰作——《分析力学》采取普通的雅致格式；该书于1788年出版，那一年恰是法国革命爆发的前一年.



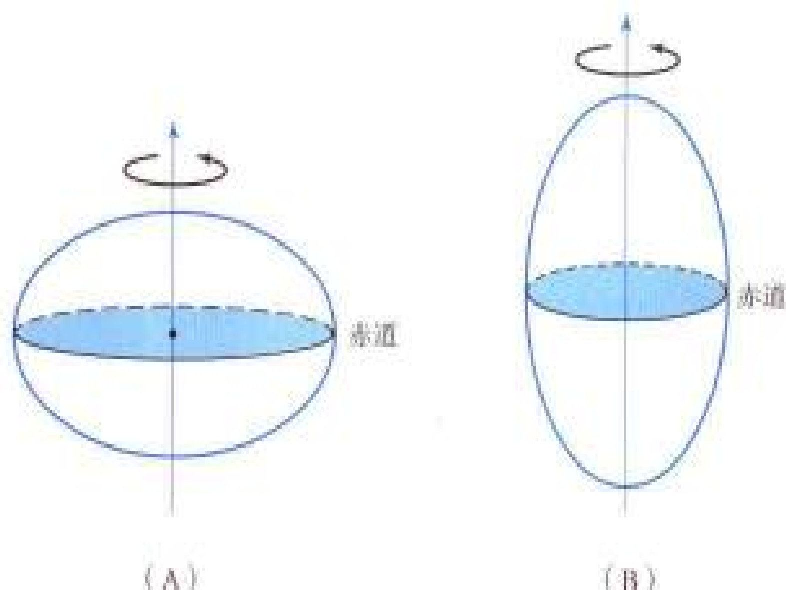
勒内·笛卡儿(1596—1650年). 按弗朗斯·哈尔斯(Frans Hals)的画制版(1648年).

所有这些发展均奠基于因牛顿所著《自然哲学的数学原理》于1687年问世而发生的那场物理学革命. 这部论著，乃人类心智最有影响力的创造物，也是最小作用量原理所切实依靠的坚强支柱.

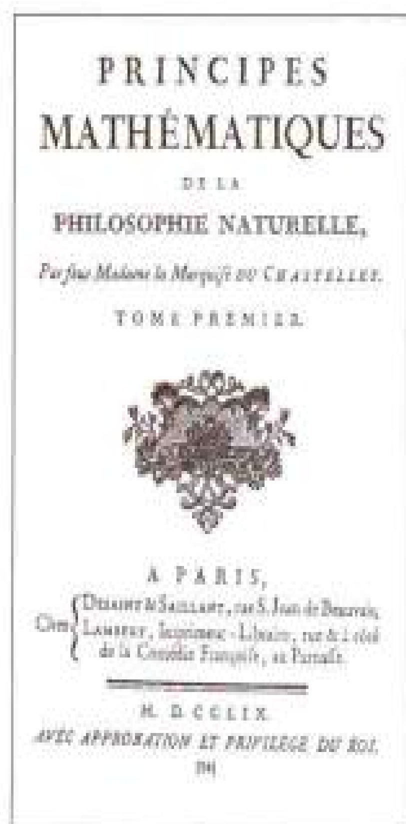
可是，牛顿的革命性观念并不被欧洲大陆，特别是当时欧洲的文化中心——法兰西所轻易接受. 17世纪，以至1730年前后，欧洲大陆的学术界被勒内·笛卡儿(René Descartes)的物理学理论所支配. 但牛顿物理学的造就，后来使人们几乎完全忘记笛卡儿的理论. 追随笛卡儿的所谓笛卡儿主义者，猛烈地抨击牛顿的学说，直至法国科学院同意根据事实、而非凭依双方争辩的高低，来裁决这场论战为止. 于是派出两支考察队，一支到瑞典境内的北极圈，另一支到赤道地带；通过大地测量以确定：地球到底如牛顿由其引力理论出发所预言的——在两极处平坦，还是如笛卡儿所断言的——在赤道地带平坦.



此版画取自莫佩蒂对拉普兰地区的考察报告，该报告于1738年以"地球的外形"为题公诸于世.



地球的夸张图示：（A）按牛顿的观点描绘；（B）按笛卡儿的观点描绘.


PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
TOME PREMIER.
A PARIS,
M. DCCLIX.

牛顿的论著《自然哲学的数学原理》的法译本（第一版、第二次印刷，巴黎，1759年）之卷首页.（第一次印刷的时间是1756年，未公开发行、印数甚少.）

北极考察由莫佩蒂于1736—1737年进行，他早就支持牛顿的观点. 由拉普兰地区的大地测量得以探明地球在两极处平坦，所以牛顿的观点是正确的；此结论亦被另一支由拉·孔达米纳（La Condamine）领导的考察队于1745年证实.

莫佩蒂因其考察的巨大成功而赢得永久的荣誉；他还把两个拉普兰女孩带回巴黎，这使其名声更增三分. 显然，女孩给巴黎人留下很深的印象.

伏尔泰因其敏捷的才思、巧妙的笔触，对于宣扬牛顿的伟大成就颇有助益. 他祝贺莫佩蒂，因莫佩蒂的工作成果明显地震撼了全球人心，同时亦使卡西尼家族（Cassinis，巴黎的一个著名的天文学家家族，而且是笛卡儿对于地球形状之观点的辩护者）为之折服. 再瞧一下本章开头的画中莫佩蒂的手势，看看他是如何自豪地表示自己的成功的.

因此，对于牛顿物理学及其利用变分（最优化）原理得以

优雅地形式化而言，这样的研究方式是十分清脱的．作为依照拉格朗日的杰作而后来被称之为新力学科学的“分析力学”的纪元可能出现；其实，这个时代终于来到了．



伏尔泰为马奎斯·杜·查特里特所作之诗篇的篇首诗句．

关于莫佩蒂原理的柏林论战

1740年，腓特烈（Frederic）二世当了普鲁士（包括其首都柏林的德国东北部）国王．他想恢复在柏林的科学院，并邀请伏尔泰出任院长．伏尔泰很高兴，但谢绝赴任，因为他宁愿呆在其情妇马奎斯·杜·查特里特（Marquise du Châtelet）[2]的住处．于是，腓特烈提出把普鲁士科学院院长之职委任于因组织北极圈考察而闻名的莫佩蒂．他接受委任，但直到1746年才就职．

其间，欧拉于1741年从俄罗斯的圣彼得堡来到柏林，成为科学院的数学物理部主任．莱昂纳德·欧拉（1707—1783年），一位牧师的儿子，十三岁不到，就进了家乡的巴塞尔大学．这在当时并不罕见．因当时学校通常局限于基础教育、即宗教训导，而最着重的是拉丁文；综合性大学的讲授也往往不超过相当有节制的水准．例如，莱布尼兹十四岁时成了其家乡的莱比锡大学的学生．他抱怨所听到的讲课，其水准低下羞人．后来他说，如果他像帕斯卡（B. Pascal）那样在巴黎度过青年时代，就可能早早为科学作出贡献．年轻的欧拉幸运得多，因为约翰·伯努利早就发现此少年天资聪慧，于是决定每周六特地为他单独上课．约翰是欧洲当时的首席数学家，故他

[2]这位名噪于世的妇人请一些杰出的科学家当家庭教师，其中有柯尼希（J.S. König），克莱侬特（A.C.Clairaut）．由于克莱侬特的帮助，她备有牛顿的《原理》唯一的法译本；为此，当她于1749年逝世时，伏尔泰特地撰写了历史性序文和一首诗《关于牛顿物理学》．

的学生欧拉就可能很快学有所成.欧拉二十岁那年便申请到巴塞尔大学的物理学教授职位.然而,他并未就任,却接受了新建的圣彼得堡学院的研究职位,在那里已聚集了所有侨居俄罗斯的瑞士科学家,其中有约翰·伯努利的两个儿子.在那里欧拉开始科学研究,其科学生涯一直延续到1783年逝世为止;值得注意的是,他甚至在1771年双目失明以后,还出版了七本著作和二百多篇论文.一生中他共写了大约九百篇论文、三十本书,对数学的所有领域乃至力学、光学、天文学,甚至对音乐乐理,都作出重要的贡献.而今他的七十多卷著作全集已经问世,但其编辑工作还未终止.

欧拉在1741年住在柏林的那段时间里,写成一百多篇论文和《力学》一书(1736年出版);这是最早用分析方法和微积分计算表述牛顿力学(牛顿和包括莱布尼兹在内的其他前辈学者避免用计算方法,而是采用愈加几何化并综合性的著述方式).欧拉的这项工作对力学领域作了革新,连同他于1765年完成的第二篇力学论文"运动论",便为拉格朗日的巨大贡献奠定了基础.

到1741年,俄罗斯的政治局势变得很不如人意,于是欧拉接受腓特烈大帝的邀请来到柏林.虽然他在柏林一呆就是二十五年,但与国王的关系始终很不适意,双方最终都甚感难堪.因此当察里娜·加德琳女皇(Tsarina Catherine)二世发出邀请后,欧拉便于1766年回到圣彼得堡,重又成为俄学院的一员.他被看作俄国的数学之父.

及至1744年,欧拉已经严格证明了最小作用量原理可以用于描述保守力场中的质点运动,例如行星围绕太阳的运动;并且这表明他相信:能够发现寓于宇宙的每一现象之中的极大或极小原则.此结论载于他的著作《求取具有极大或

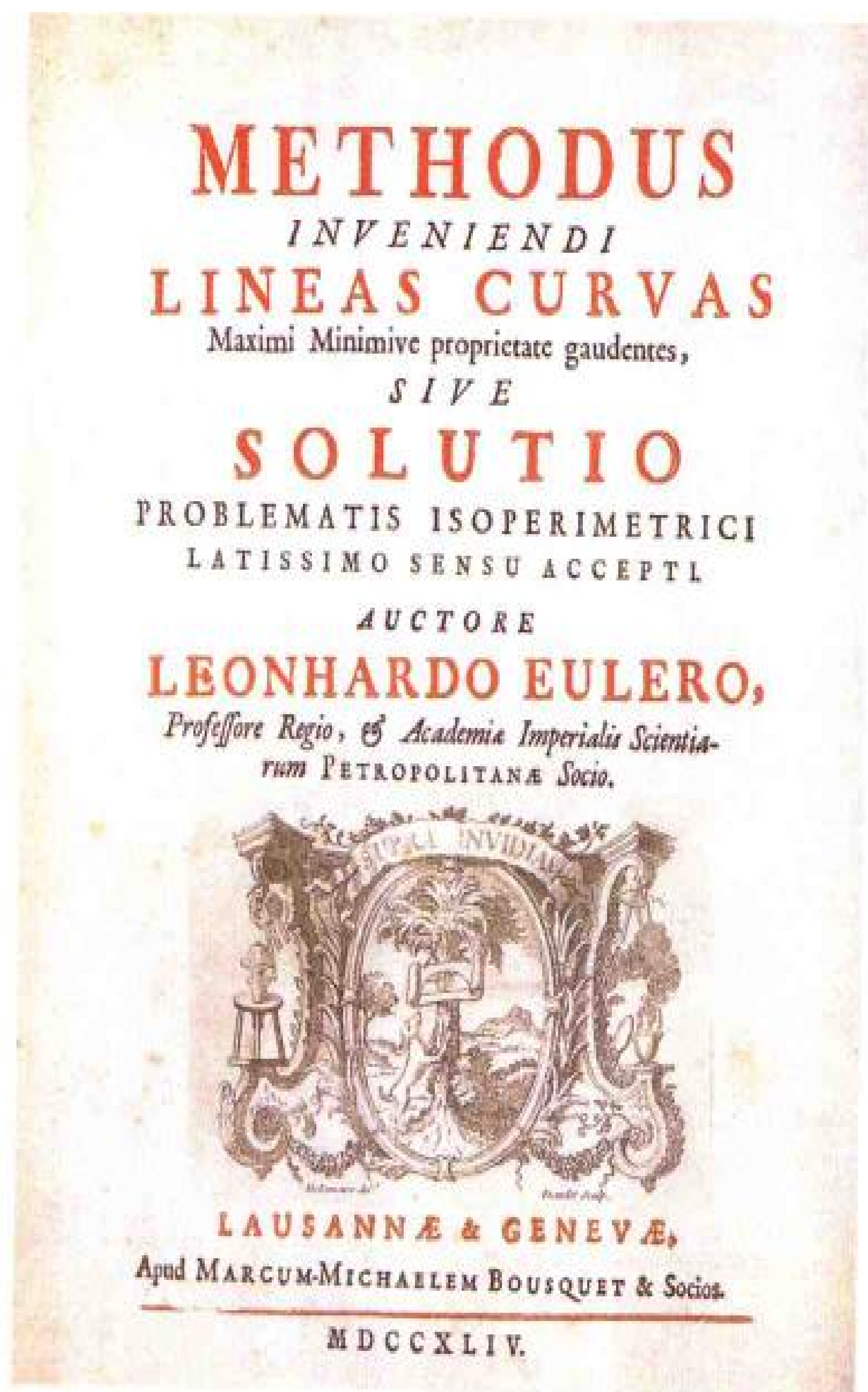
极小性质之曲线的方法》(简曰《求解方法》)之附录. 这是阐述变分法的第一本教科书, 也是数学史上最有名的著作之一. 当然, 欧拉于1743年写这本书的附录时并不知晓莫佩蒂的原理. 而且, 欧拉所处理的问题比莫佩蒂在其1746年的论文里所处理的问题难得多.

1746年莫佩蒂发表了论述最小作用量的论文. 他对欧拉的研究成果是十分了解的, 因为在其文章的前言里简略地提到这一点; 可是他接着加了这样的评论: "这些陈述是将我的原理对行星运动的漂亮应用", 从而声称自己拥有发明该原理的优先权.

欧拉对此的反应是: 把优先权完全归于莫佩蒂; 并辩解道, 他自己的经济原理只是一种"居后见识", 而莫佩蒂定律才是世界的一个居先概念. 欧拉因这一举动而受到激烈的评判. 某些历史学家把他的行为归因于宽宏大度以及对于其所任科学院院长之职守的忠诚; 另一些历史学家却把这视作其德性怯懦堪怜之一例. 还有一些评论家觉得这两种评判都过于简单化, 认为欧拉的行为乃起因于他的哲学态度和宗教信念; 此断言可能是适当的.

可是, 莫佩蒂的推理有一些缺陷. 第一, 他只是用几个实例作为其原理的证据; 第二, 更糟糕, 他的原理不总是正确.

让我们讨论一个莫佩蒂的例证——光的反射. 这里, 最小作用量定律原来是等价于如下规则: 光从光源射向观测者, 光沿射线传播所需之时间均小于沿其他所有可能路径所需之时间. (光传播的这个规则已由费马于1662年明确地表述.) 如果光在各向同性的均匀介质(例如在水或密度均匀的空气)中行进, 那么极小原理相当于如下更简单的规则: 光路是光



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

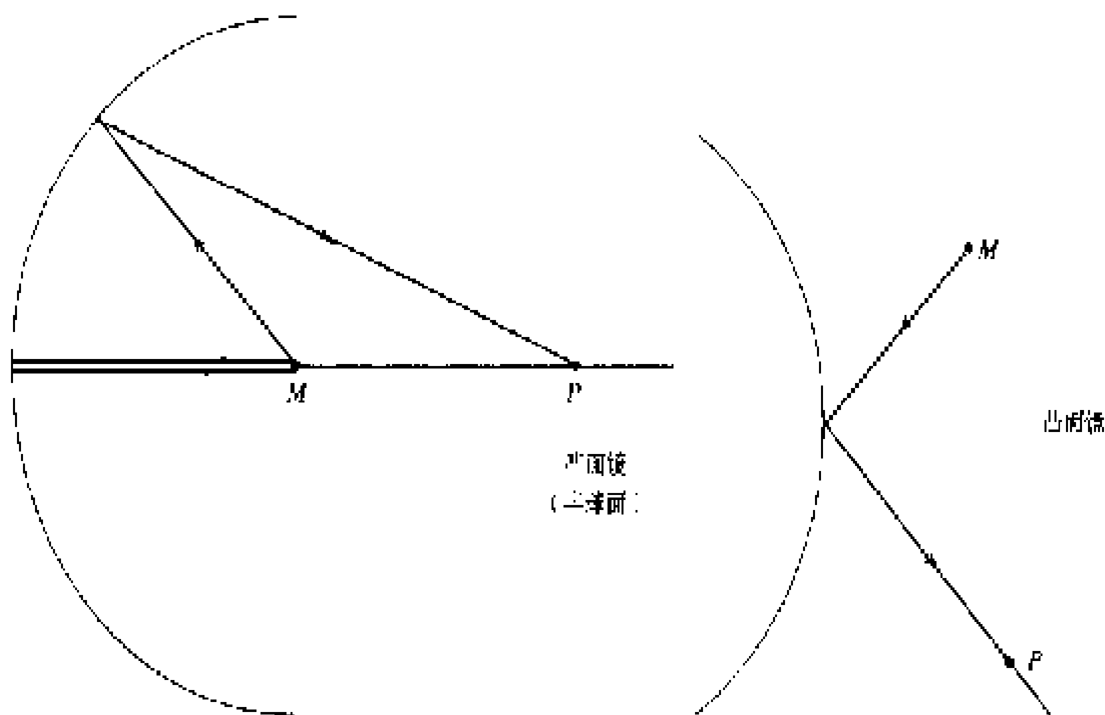
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

欧拉的《求解方法》(1744年）一书的卷首页.

源与观测者之间可能联线中最短的一条；此规则早已为古希腊人所知。

如下图所示，设有一球面镜，置于某良好介质之中。一光线自球面镜中心M点发出，按照莫佩蒂原理，此光线被反射，然后行进到M点后面的某一点P。容易看出，别的任意一条由从M点指向镜面，再从镜面指向P点的两条直线段组成的路径都比这条光线短。再则，若使光由凸面镜反射，其光程确实最小。所以，自然界是“节约”还是“浪费”，仅取决于镜面的形状。

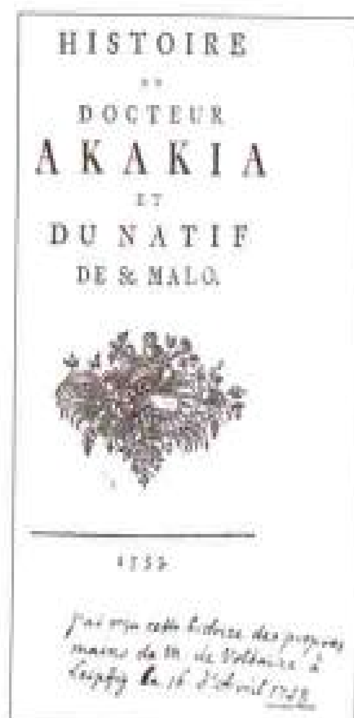
薛瓦利埃·达西（Chevalier d'Arcy）于1749年和1752年指



左：光由凹面镜反射。虚线表示从M到P且经过镜面的一条可能的路线，它比实际光线（以粗黑线表示）短；右：光由凸面镜反射。


Vollständige
Sammlung
aller
Streitschriften,
über das vorgebliche Gesetz der Natur,
von der kleinsten Kraft, in den Wirkungen der Körper,
Herrn Präsidenten von Maupertuis
zu Berlin,
Herrn Professor König in Holland,
Unpartheyisch ins Deutsche übersetzt.
Leipzig,
bey Bernhard Christoph Breitkopf.

《莫佩蒂》的卷首页，其中收集了针对柏林科学院主管的诽谤.


HISTOIRE
DOCTEUR
AKAKIA
ET
DU NATIF
DE S. MALO.

《阿卡凯博士的抨击》的卷首页．上有无名氏的潦草手迹.

出，依照这种论证方式，莫佩蒂原理并未表述清楚，而且导致错误的论断．看来，立足于最大经济原理的神学－哲学解释受到难以弥补的损失．

莫佩蒂遭到柏林科学院的一位新成员——瑞士数学家约翰·萨穆埃尔·柯尼希（Johann Samuel König, 1712－1757年）的非难，后者于1750年来到柏林．他声称莱布尼兹已于1707年谈及过最小作用量原理．一场就柯尼希这一说法所依据的证件是否伪造的争论激烈地展开，因为他只提供了一份其中讲到作用量原理的莱布尼兹信札之抄件．科学院要求柯尼希出示原件；柯尼希则申言曾在一位年轻的瑞士诗人萨穆埃尔·亨齐（Samuel Henzi）那里见到过．亨齐曾住在伯恩；或更确切地说，他最终在伯恩住过．其时伯恩市议会的议员们不得不将他斩首，因他卷入了1749年的革命活动．结果，亨齐的财产被查封，尔后被变卖、被毁坏．所以，莱布尼兹的信札不可能找到，甚至由腓特烈大帝亲自出面向伯恩市议会查询也无济于事．因此，科学院于1752年4月13日宣布：柯尼希所提供之莱布尼兹的那封事关重大的信札的抄件是伪造的．柯尼希对此的反应是立即向科学院辞职；于是以柯尼希为一方，而以莫佩蒂和欧拉为另一方，彼此间的争论开始了．接着，伏尔泰介入这场争论，于1752年在其著作《阿卡凯博士的抨击》中攻讦莫佩蒂．结果，巴黎的知识界以及百科全书的编纂者们站在伏尔泰一边反对莫佩蒂．莫佩蒂则就停止其辩论了．他作为一个病人，于1753年留在腓特烈大帝的宫里养息，只是偶尔回到柏林去．1759年，他死于巴塞尔——他的朋友约翰·伯努利第二的家中．

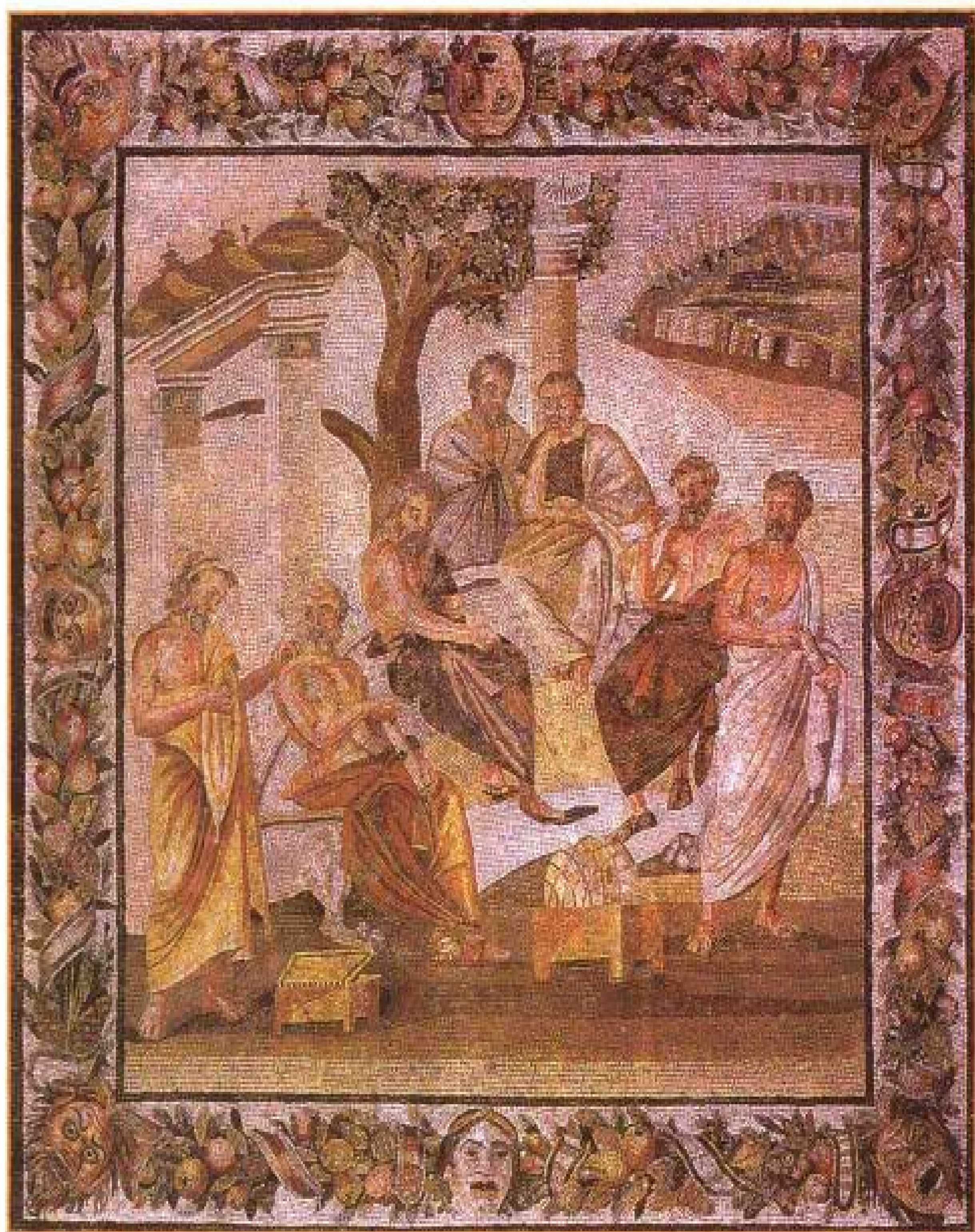
而今再去争辩谁是最小作用量的第一个发明者并无意义，大多数这种争论皆然．人们可以给予欧拉和莫佩蒂两人以发明者的荣誉．然而实际上，其优先权似当属于莱布尼兹，因为现在知道，他在好几封信中详细阐述、并有根有据地证明了作用量

原理．公众承认，唯在那封遗失的信中，他按其一般目的论的原理，十分明确地陈述：必须使作用量具有极值（即极大值或极小值）．然而到1913年，那封颇有争议的信札的可靠性骤增；在著名的哥达图书馆里有一束莱布尼兹的信札，从中找到了另一份不为人知的抄件，乃以同样笔迹书写，于是原来引起争议的信被认作是可靠的了．但对后世人来说，莫佩蒂依然是首先提出作用量原理的人；该原理作为物理学的一条普适原理，藉以可导出所有其他原理．至于欧拉，则构建其数学结构，即后来用作一切变分原理的一个模型．

从1707年起保存于弗里登施泰因（Friedenstein）城堡的哥达图书馆内的莱布尼兹信札之抄件，它由卡别兹（Kabitz）于1913年在此图书馆里找到．这里是信札的最后两页，其中莱布尼兹明确地阐述了作用量原理．

可以概而言之，莫佩蒂的世界总体模式乃以植根于莱布尼兹哲学的作用量原理的形式表示．莱布尼兹已先期用甚至更好、更一般的形式陈述过这条原理，他并不要求作用量只为极小，也可能达到极大．在莱布尼兹看来，极大和极小是等价的．而莫佩蒂之形而上学的经济原理要求极小作为其基本成分．可是若无数学和物理学后来相当大的进展，此作用量原理永远不可能演进成为一条能够定量地应用的普适定律．而微积分和牛顿力学是欧拉和拉格朗日由以确立作用量原理的坚实基础．

然而，宇宙间存在基本的秩序与和谐性，以及可以用数学来描述宇宙的秩序这种思想可溯源于古希腊．这一点为莱布尼兹所深知，他仔细思考过柏拉图（Plato）的《斐多篇》中所叙述过的这种思想；文艺复兴时期以及巴罗克时代的许多科学家亦然如此．所以若不查看一下古代科学遗产，我们的撰述便有不足之嫌了．



柏拉图的学园[此马赛克(镶嵌)画86×85cm，在庞贝城的西密乌·斯特凡努斯(T. Siminius Stephanus)的别墅里发现，藏于那不勒斯考古博物院]. 无疑，画中七人中有一位是柏拉图，已辨认出乃左起第三人，另外六人亦均为哲学家. 柏拉图正在讲述宇宙、天球和星星. 这马赛克画镶嵌出柏拉图学园，学园后面即为雅典城. 此画或许是一幅仿希腊风貌之油画的复制品(公元前1世纪)，原作可能成于公元前3世纪.

2 古代科学遗产



您——大自然，我的女神，
为了您的规则，
我的操劳更受牵制十分。
〔莎士比亚：《李尔王》第一幕第二场，乃高斯（Gauss）所引用〕

科学中的许多基本观念源于古代；无疑，人们现在的思考方式，其大部分当归因于前人的成就. 现代科学传承于古代的一个主要观念，就是宇宙所具有的基本秩序与和谐性，该和谐性可能呈现于优美的数学结构. 因为希腊数学家大致局限于几何学领域，故而古代科学家采用几何模式描绘自然界.

有趣的是，古代科学中已有最优性原理，但只是采取最起码的表述形式；尽管这条原理或许已为古代学者所喜爱，因为他们认识到万物的和谐景象正对应于世界的最佳秩序．让我们较仔细地考察一下古希腊以及甚至更早期的文明地区，由此弄清形式完美的几何学是如何发明的．

埃及和巴比伦的数学



欧几里得的著作全集中的版画，该书由戴维·格雷戈里（David Gregory）出版（牛津，1703年）；此画描绘罗马建筑师维特鲁夫（Vitruv）所述说的一段情节：希腊哲学家亚里斯提卜（Aristippos）因船舶失事，而发现了画在沙滩上的几何图形，使鼓励伙伴们说："朋友，我们大有希望了，因为我看到了人的踪迹．"

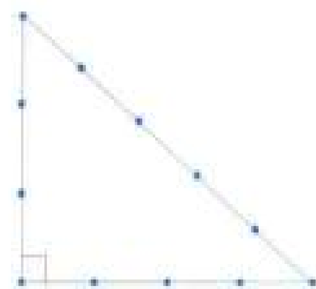
按照通常的说法，公元前7—前6世纪，数学发端于希腊，此后希腊人创作了一份近乎通用的字母表（这份标准的希腊字母表唯至公元前4世纪才被普遍接受）．然而现代史学家声称，那一时期人们尚未很好地形成科学认识，并没有初始的起源，因为一切事件均待实际发生后很久才记载下来．甚至古代科学家，未必一定知道数学源于何处以及第一位数学家是谁．关于早期数学领域的两位杰出人物——美里塔司（城）的泰勒斯（Thales，约公元前624—前548年）和萨摩亚（群岛）的毕达哥拉斯（Pythagoras, 约公元前580—前500年）的传说故事近乎是一种传奇．而今十分肯定，通常归功于早期希腊哲学家的数学知识，其实乃由古希腊文明时期之前若干世纪的埃及人和巴比伦人所认知的．人们对埃及数学的了解，其主要来源之一便是著名的（古埃及）兰德纸草纸（公元前17世纪）——一种数学手册，伦敦的不列颠博物馆藏有这种古书．由此以及其他纸草纸古书，人们了解到，古埃及人已有了十进制，并能很好地作小数计算．他们还能求解单变量的一次和二次方程；能计算某些几何图形（诸如正方形、长方形、三角形或梯形）；并有一个计算圆盘面积的相当好的近似公式，采用的是单位半径圆盘的面积数值为3.16，此即π的取值．他们知道如何计算某些立体（诸如



毕达哥拉斯：12世纪的一座塑像，置于沙特尔（Chartres）大教堂.

立方体、长方体、圆锥体、圆柱体和四面体）的体积. 古埃及人甚至熟悉毕达哥拉斯定理，至少在某些场合下理解了它；并将该定理用于构造直角，即借用打结绳子，通过毕达哥拉斯三个一组数——例如3，4，5（$3^2+4^2=5^2$）——构造之.

幼发拉底－巴比伦的数学已达到古希腊之前一切文明国家的最高水准；甚至达到印度的水准，某些研究者还相信，甚或达到中国的水准. 人们对此的知识来源于：从幼发拉底河与底格里斯河之间的美索不达米亚地区挖出的烤干了的土砖上有大量楔形文字记载. 在公元前第三个千年期间，幼发拉底人已经有了一种基数为60的数制，此即在乌尔第三王朝期间（公元前2400—前2000年）制定的六十进制. 显然，六十进制主要用于数学课程，而日常生活中采用的是十进制. 美索不达米亚的数学成就达到巴比伦早期（约公元前2000—前1600年）的顶峰. 从



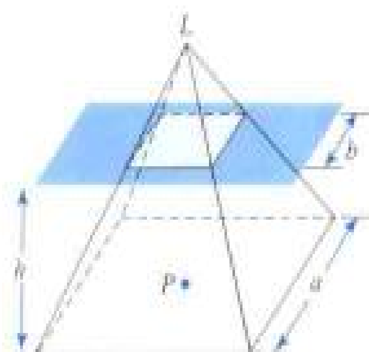
木匠用一根打结的绳子构成直角三角形.

那时起巴比伦人具备了出色的运算知识，他们能算平方根，还有了指数表，甚至开始计算对数。巴比伦早期数学基本上是代数性质的。那时掌握了一个、两个、三个变量的线性方程，还有二次、四次以及某些情况下三次和更高次的方程。大量几何问题也能解决了，其中包括计算三角形、正多边形、梯形的面积；还有了计算圆盘的面积和周长的近似公式，并能计算圆锥体和四面体的体积。也已了解所谓毕达哥拉斯定理和泰勒斯定理，还将其应用于实际问题中；但这两条定理始终未被表示成为普遍形式的公式，而代之以三个一组的毕达哥拉斯数被列成表格而加以运用。然而，公元前1600年以后巴比伦数学停滞不前；因为几乎未发现下一个一千年间关于数学的楔形文字课本。唯有在公元前五百年间大量数学课本重又出现；这可能与那时实用天文学发展对于数学的需求相关。

希腊人与数学证明的观念

希腊人定居在地中海地区，对于维持和拓展埃及人和巴比伦人的数学知识必然起到重要作用。希腊人所作出的第一项重大进展很可能就是考虑到：数学概念（诸如数和几何图形）乃抽象物，乃人类心智的创造物，而非现实世界的成分。一条直线不再当作是一根拉紧的绳子或金字塔的一条边，而一个矩形也不是一块土地的边界。相反，它们被定义为一些概念，一些仅仅可能将物理客体藉以近似表示的抽象物。看来十分肯定的是：希腊哲学家首先认识到，数学陈述必须是从某些基本事实或基本公理出发、用逻辑演绎加以证明的。在这之前，数学结论是通过归纳、亦即借助于足够多的经验予以验证的。而最重要的进展则是认识到，一条数学定理不可能用一千个事例或甚至一百万个事例来证明；对此，倘若该定理正确，原则上理当有无限多个事例遵循该定理。

泰勒斯被认作发明了严格的数学证明方法；此看法不管确实与否，希腊人总是十分清楚：对于给定的数学陈述，其正确性必须予以证明．据说泰勒斯是一位商人，为生意上的事走南闯北，旅途中可能接触到计算一些平面图形之面积以及一些立体之体积的各种公式．往往计算相同的面积和体积可能有不同的公式．譬如说，计算方底面的锥台的体积即是一例．锥台是平截头棱锥体，乃以一平行于底面的平面在某一h高度处截去顶角，如右图所示．巴比伦人有一个计算这种物体的公式，而埃及人的计算公式与其不同．（埃及人导出准确的几何公式肯定有其实际理由：他们必须定期地丈量土地，因为尼罗河年年泛滥，被淹平原的所有边界标志几乎全都湮没了．）



方底锥台的体积为$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$.

现已知，肯定不可能有两个同时正确的公式；那末，泰勒斯所需解决的问题是：第一，如何确定正确的公式，第二，如何使他人承认那个公式是正确的．毫无疑问，人们能这样讨论更主观性的问题：诸如两项精致的技艺性工作中哪一项更好．泰勒斯为谋求有关几何图形的正确表述而引申出的方法，构成为几何学的开端，而他用来使同事们确信其正确的方式可能就是演绎推理性证明方法的起源[1]．（偶尔，埃及人所导出的公式也是正确的．）

因此，泰勒斯被说成是希腊几何学的鼻祖并不奇怪．几何学，作为一门由严格的演绎证明所支持的抽象数学理论，它的创始必定是科学思想发展的一个转折点．尤其是，我们将谈到，这导致用于解释物理现象的数学模型的产生．例如，希腊人已有曲线的概念；他们将其定义为点在空间中的运动轨迹．很清楚，倘若把一行星看作天空中的一个点，其运动就在天空中形成一条虚拟曲线．

[1]第3章和第5章将讨论另外一些缘故，以说明数学陈述为什么需要准确的推理性证明，而不可能用“经验验证”的方式得出．

圆、毕达哥拉斯以及球面音乐

最简单的曲线乃是直线和圆．直线是联结空间中两点的最短路线．这是一只小虫（把它想像成很小很小）的飞行轨迹，它沿着最短的路径从一点飞到另一点．圆是某一固定平面内所有与中心点距离相等的点的集合．如果在球面上任意设定一点，并使球面绕一固定轴旋转，那么该点便画出一个圆．

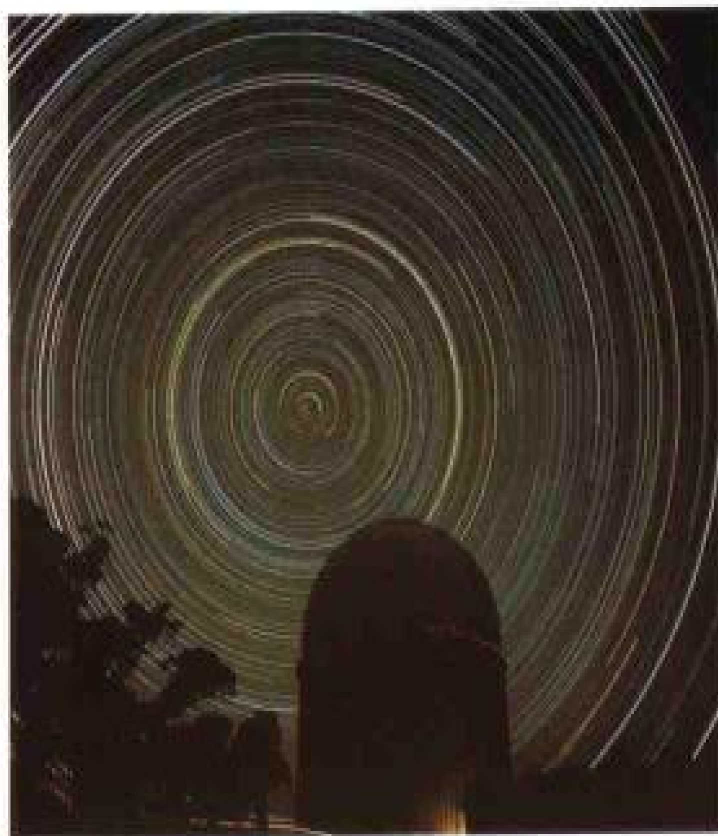
乍一看，呈现漂亮对称性的圆似乎并不具备如同直线所具有的那种极小性质．然而，倘若让一个圆绕其一根直径旋转，就生成一个球面．取生成球面的圆上两点，球面上联结这两点的最短路径必定是该圆上的一段弧．（再则，令人十分惊奇的是，圆的最优性亦为希腊人所知，这涉及“黛朵女王问题”，见本章后面所述．）



球面由空间里与中心点距离确定且相等的所有的点构成．球面上A，B两点的最短联线乃大圆上的一段弧．

古代科学家把有关圆和球的一些观念用于构造得以解释空中行星、恒星运动的数学模型．毕达哥拉斯假定，诸恒星悬挂在一个透明的球面上，而这球面每天绕着一根通过地球的轴线旋转．同样，另外七颗古老行星——太阳、月亮、水星、火星、木星、金星和土星也都分别悬挂在各自的运动球面上．

后来，柏拉图在其著作《蒂迈欧篇》中把时间概念的产生与天空和行星联系起来．凭藉太阳而定义白昼和黑夜、命名了“年”；凭藉月亮——“当月亮在其圆周轨道上再次赶上太阳”，则将所需时间命名为“月”．“除了个别行星外，人们还不知道别的行星的周期；亦既未为那些周期命名，又未定量地观测其轨道运动，以致尚未确切地了解，那些行星漂移的复杂变化、奇异改变也都取定时的形式．”毕达哥拉斯的行星、天空概念后来就发展成天体运动理论，形成为16世纪天文学的基础．这个模型比较繁复，这里只提及它的另一个特征．



天球的运转.

毕达哥拉斯学派相信，数是理解宇宙间秩序的钥匙．他们所谓的数是指整数（1，2，3，4，…）．亚里士多德在其《形而上学》里描写了毕达哥拉斯学派的这种信念，如下所述：

> 所谓的毕达哥拉斯学派，把他们的原理用于数学和……以致相信这些原理是世界万物的原则．因为数被大自然首先蕴含于这些原理之中，故而他们想像，能用数探明世界，而不是用火、土、水以及许多类似的东西．其结果是……又因为他们进一步了解了音阶的性质和音阶之比乃基于数，所有其他物品完全凭藉数为模型而构成．因此数是整个物理世界的终极东西．于是，他们假定数的单位就是万物的基元，整个宇宙乃是和谐与可数的．

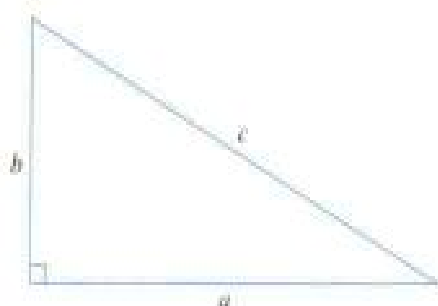
事实上，毕达哥拉斯已经发现了数与乐声之间的明显关系．

例如，倘若拨动一下吉他上一根拉紧的弦线，就形成了一个音符．该音符之声调的高低取决于弦线的长度．所以，弦乐器的弹奏者通过改变振动弦线的长度来产生不同声调的乐音．毕达哥拉斯惊奇地观察到，当弦线的长度成整数比例（譬如说比例为1：2、2：3、3：4或5：8）时，弦线产生的声音颇为悦耳．这样，和谐性可以用整数来解释．在毕达哥拉斯学派看来，这个发现具有神秘的意义．他们得出推论说：自然界的一切关系都能用整数来表示，于是便相信，各天体之间的距离之比可能对应于各和音弦线的长度之比．那么，天空中的一些球面，当其旋转、且唯在初始起动时，才能听到其产生的和谐声音；这就是文学作品中经常提到的球面音乐．

关于空中和谐性的这一毕达哥拉斯概念或许是第一个抽象模型，藉以企图用简单而协调的数学理论解释复杂的自然现象．实际上，就数学史和物理学史而观，毕达哥拉斯原来已起到那么重要的作用；所以我们应当对其生平稍作详述，尽管一些细节可能只是传说罢了．

据说毕达哥拉斯生于希腊东部靠近小亚细亚的萨摩斯岛．他去访问过泰勒斯．泰勒斯鼓励他到埃及学习；泰勒斯的许多原始知识正源出于埃及．毕达哥拉斯在埃及游学多年，获得数学和神秘主义两方面的知识．他回到萨摩斯后组建了一个信奉宗教和信守哲学的社团．由于政治上的原因，他最终离开家乡，移居意大利南部的克罗托，在那里他有许多支持者和追随者．

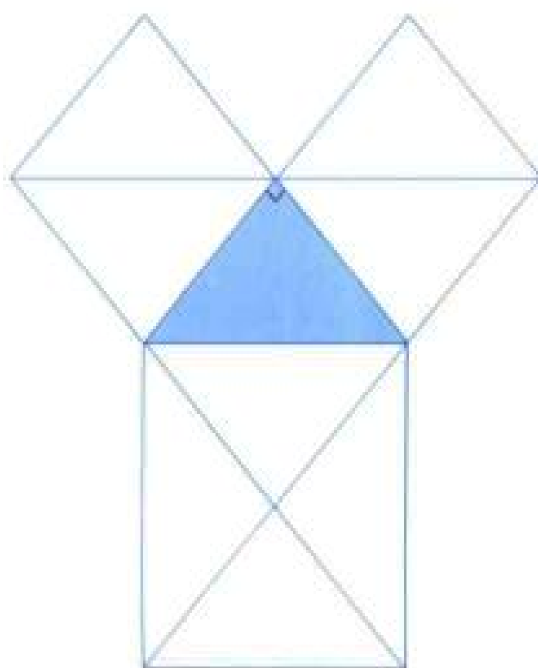
毕达哥拉斯组建的这个社团有一系列严格的信条和一个固定的管理章程．新的入社者在考察期之后被允许听到毕达哥拉斯的声音，但只能在幕后听讲；几年以后，当入社者的灵魂被毕达哥拉斯学派的生活方式进一步净化了，才被准予直接见到毕达哥拉斯．毕达哥拉斯学派相信，灵魂能通过一些球面上升，



毕达哥拉斯定理：对于任何直角三角形，$a^2+b^2=c^2$均成立.

依靠数学则最终与上帝并合.

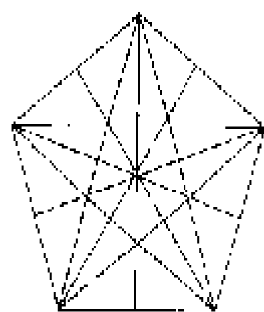
许多数学成果被归功于这个社团；如毕达哥拉斯定理即是一例. 该定理意指：直角三角形的三条边长由公式 $a^2+b^2=c^2$ 关联，其中 c 是最长边的长度，a 和 b 是相互垂直的两条边的长度. 该定理促使毕达哥拉斯的信徒们发现了无理数；例如$\sqrt{2}$——2的平方根，倘若他们论及两短边的长度均为1的直角三角形的话. 其长边必定满足 $c^2=1+1=2$，所以 $c=\sqrt{2}$. 由此就得出结论：数$\sqrt{2}$必定存在，因为这样的三角形是存在的. 再则，不难证明$\sqrt{2}$不能写作两个整数的比值，故$\sqrt{2}$不是有理数. [所谓有理数，是指它能表示成两个整数之比，即为诸如2/3，17/39，



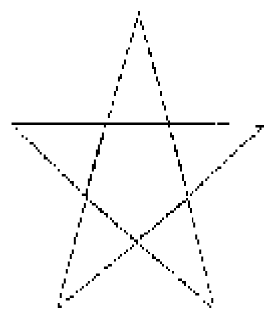
对于等边直角三角形，通过观察即能明白，两短边正方形的面积之和就等于长边正方形的面积.

14/64，…那样的分数；否则便称为无理数．可以证明，如果数 x 是有理的，则其十进制无限小数终究是周期性的，诸如：2/3=0.6666…，13/11=1.18888…；或5/7=0.714285714285…；而如果 x 的十进制表示最终并不周期性地重复，则 x 便是无理数．π 是一个人所共知的无理数．半径为1的圆盘的面积，其值即为 π，这由兰贝特（Lambert）于1761年所证得．其实，林德曼（Lindemann）于1882年论证 π 又是一个超越数，它并非带有整数系数 a，b，c，…，d 的代数方程 $a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n = 0$ 的根．|

毕达哥拉斯学派因发现无理数而震惊，由于这种数与他们的信条——世界万物都可用整数及其比值来解释——相抵触．显然，他们起先试图把这个不愉快的事实当作一个不可思议的奇迹．据一则传说，发现者——梅塔蓬图姆的希帕苏斯（Hippasus，约公元前450年）在其获得这个发现之后的一次航行中被人抛入海中溺死了．或许在科学史的开初时期，抽象思维不可避免地导致一个完全推垮人们先人之见的结论．希帕苏斯可能发现：正五边形的边长与对角线的长度是不可通约的，二者的比值是一个无理数．五角星形——正五边形对角线联成的星形（见图所示）是毕达哥拉斯学派的印记．这后来成为一种避邪物——一个可以躲避灾祸和危险的魔幻记号；神学家福斯图斯（Faustus）把它用来咒诅"不可言喻的东西"．



正五边形.



五角星形.

据另一则传说，希帕苏斯溺死的起因是发表了他的发现：正十二面体可以内接于球面；想来此发现被毕达哥拉斯学派视作另一不可思议的奇迹．正十二面体是一种凸形多面体，其十二个面是相同的正五边形．这是毕达哥拉斯学派可能知晓的五个"柏拉图立体"中的一个，另外四个是正四面体、立方体、正八面体和正二十面体；它们分别标记火、土、气和水．按照柏拉图的《蒂迈欧篇》，上帝把十二面体当作整个宇宙的轮廓．标记秩序井然的宇宙的这五

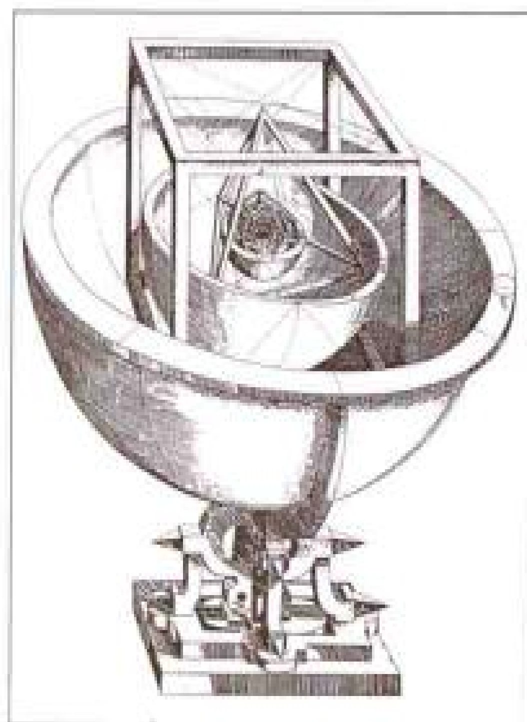
证明：$\sqrt{2}$ 不是两个整数之比

为了证明这点，我们假定2的平方根是两个整数之比，则须表明此假定会导致矛盾．设$\sqrt{2}=P/Q$，其中P和Q都是整数；若使P和Q除以其所有的公因子，便可把$\sqrt{2}$表示成p/q，其中p和q是不再包含整数公因子的确定的整数．假设已得出带有一对p和q的式子$\sqrt{2}=p/q$，若将此式两边平方，则有$2=p^2/q^2$；再乘以q^2，便得$2q^2=p^2$，且列表说明$2q^2$和p^2之末位数字的各种可能性：

一数的末位数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
其平方的末位数字	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
平方之二倍的末位数字	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

诚然，$2q^2$的末位必定取第三行数字中的一个，而p^2的末位必定取第二行数字中的一个．这两行出现的数字唯有0是相同的；所以，唯有当$2q^2$和p^2的末位取0值时才可能相等，就是说，唯有p的末位为0，q的末位为0或5，才是可能的；此时p和q必然可被5整除。但这就与我们的假定——由P和Q除以其所有的公因子而得到p和q——发生矛盾．此矛盾表明$\sqrt{2}=P/Q$这个初始假定不可能正确．因此，2的平方根不是两个整数之比．

个立体就是宇宙立体．它们在约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler）设计的世界图景中重又出现；该设计图在他的著作《神秘的宇宙》中公布（1596年）．开普勒以为自己已经弄明白上帝用以产生宇宙的方案．为此他把五个正立体放置于相邻的球面之间；放置的形式为：任何那个宇宙球面均内接一个宇宙立体，同时又内接于下一个更高大的立体．遗憾的是，这种美妙的想法并不引出别的结果；但这是开普勒之伟大的天文学生涯的开端，并表明了他那种推测性的思维方式．与我们理性化时代的普遍



五个柏拉图立体. 取自开普勒:《神秘的宇宙》第二版, 法兰克福, 1621年(第一版于1596年在蒂宾根面世).

想法相反，许多大科学家确实在其科学探索中仿照这种推测性（或形而上学）的研究方式.

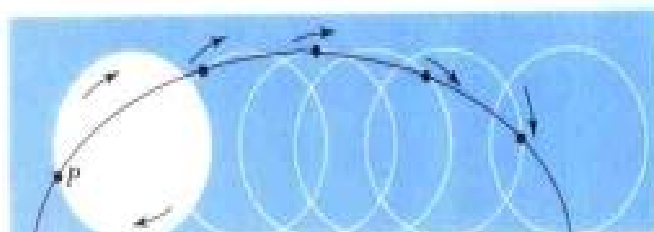
毕达哥拉斯社团的荫蔽形式以及料想是由毕达哥拉斯在埃及训练而成的神秘习惯招致不少嫌疑. 大约在公元前500年，毕达哥拉斯被迫逃至塔兰托，继而逃至梅塔蓬图姆，在那里被人谋杀. 他的追随者们继续在别处活动，至少活动到公元前400年为止.

摆线和圆锥曲线
阿波罗尼奥斯、托勒密及其无与伦比的著作

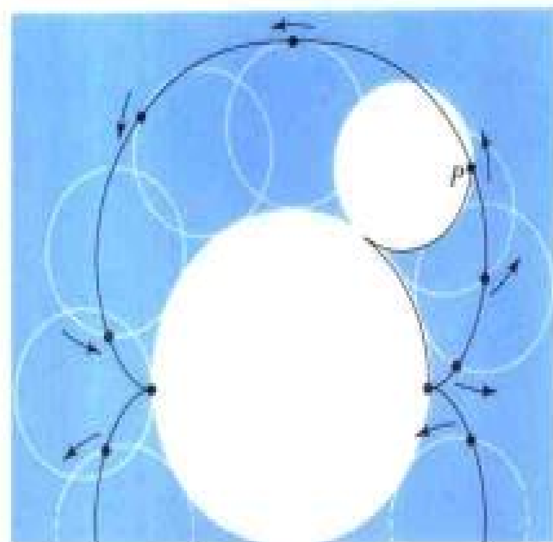
毕达哥拉斯学派解散以后，希腊的许多别的学派继续研究几何学. 基本的数学法则（如人们心中所想像的）是把一些简单的几何结构构成越来越复杂的几何结构. 于是，希腊人从具有令人中意的那种极小性质的直线和圆出发，能构成比较复杂的曲线. 例如，让一个圆在一条直线上滚动（火车轮子在铁轨上滚动即是如此）或在另一个圆上滚动.

试考察由滚动的圆之边缘上的一个固定点所描绘出来的曲线. 倘若圆轮是在直线轨道上滚动，固定点描绘出的便是所谓的摆线，而如果是在圆轨道的外侧滚动，则描绘出的是外摆线，如果是在圆轨道的内侧滚动，则描绘出的是内摆线.

另一类曲线，称为次摆线，乃由附着在一圆轮上的一点（不必在边缘上）在圆沿一直线滚动时形成；或者此圆在另一个圆的外侧滚动（该点形成外次摆线），或者在另一个圆的内侧滚动（形成内次摆线）.

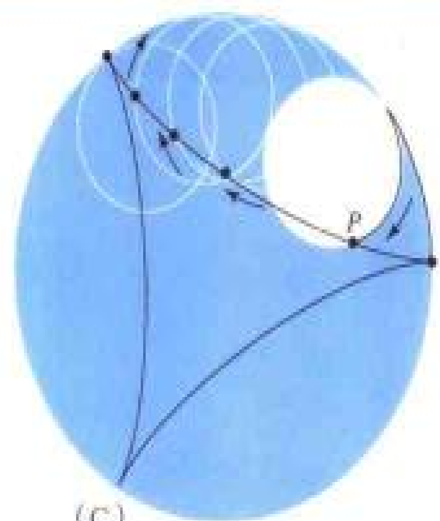


（A）



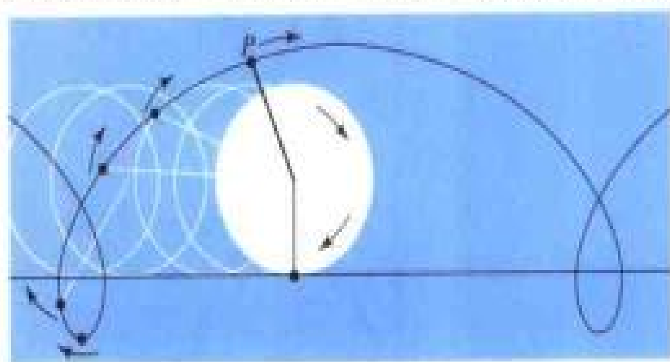
（B）

可以通过投影方式产生另一种曲线：把圆沿着从一固定点——投影中心（如右下图中的灯泡）——发出的直线投影到一个固定的平面；此曲线就是椭圆，乃五种圆锥曲线中的一种．顾名思义，圆锥曲线是由平面交截旋转锥面而形成．这样的锥面可以由通过P点的L线绕着A轴旋转而得到，如下一页左上图所示；看来像尖端相接的两个锥形冰淇淋．P点是锥面的顶点．用平面交截锥面，每个平面与锥面的交点不至一个（如下一页的下图所示），而是得



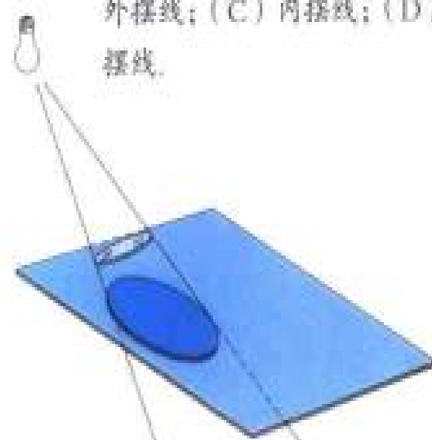
（C）

旋轮曲线：（A）摆线；（B）外摆线；（C）内摆线；（D）次摆线．



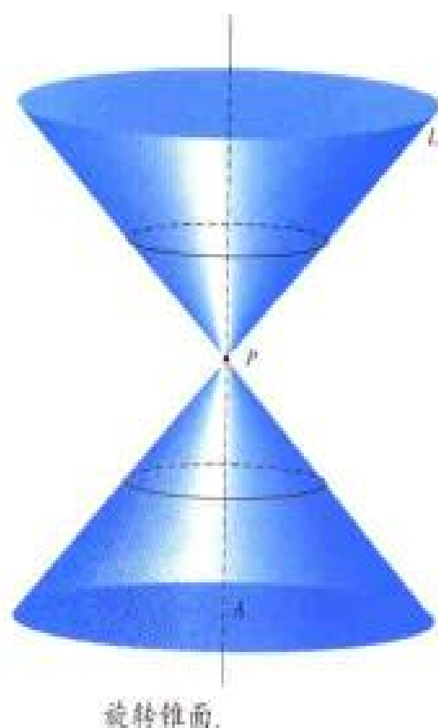
（D）

出五种圆锥曲线：除椭圆外乃为圆、抛物线、双曲线和直线（图中未画出）．


椭圆乃圆的中心投影．

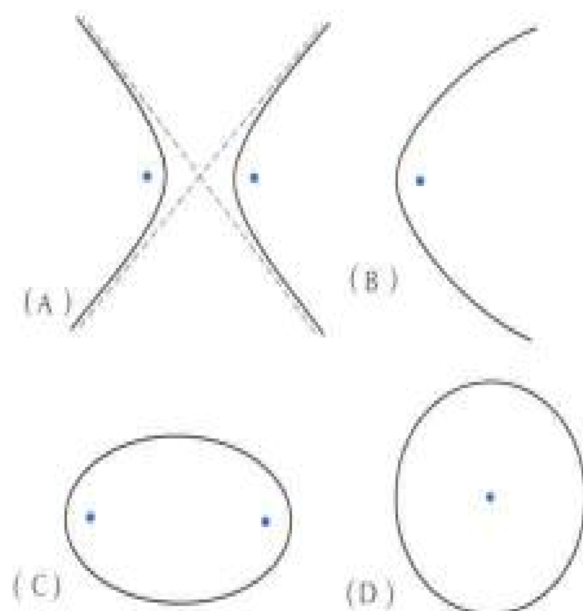
除直线外，每种圆锥曲线都有一个或两个焦点：圆有一个焦点，即其中心；抛物线亦然；椭圆和双曲线有两个焦点，位于主轴上．这些焦点的一些特性在下文叙述．

关于圆锥曲线的主要研究成果由佩尔加的阿波罗尼奥斯（Apollonius，公元前262—前190年）给出．在他的八卷本《圆锥曲线》中描述了这些成果．前四卷回顾了欧几里得在这方面的工作，欧氏对此的工作成果并未流传后世．再则，第八卷乃阿波罗尼奥斯的专题论文，也遗失了．

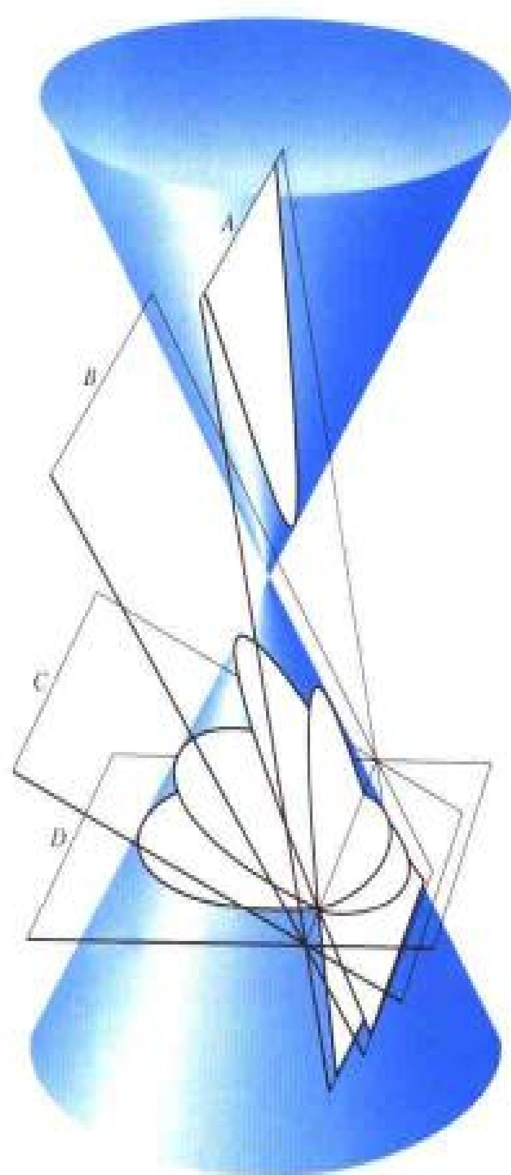


旋转锥面．

圆锥曲线的发现，被归功于梅内克缪斯（Menaechmus）



圆锥曲线的平面表示：（A）双曲线及其焦点和渐近线；（B）抛物线及其焦点；（C）椭圆及其焦点；（D）圆及其中心．



圆锥曲线：（A）双曲线；（B）抛物线；（C）椭圆；（D）圆．



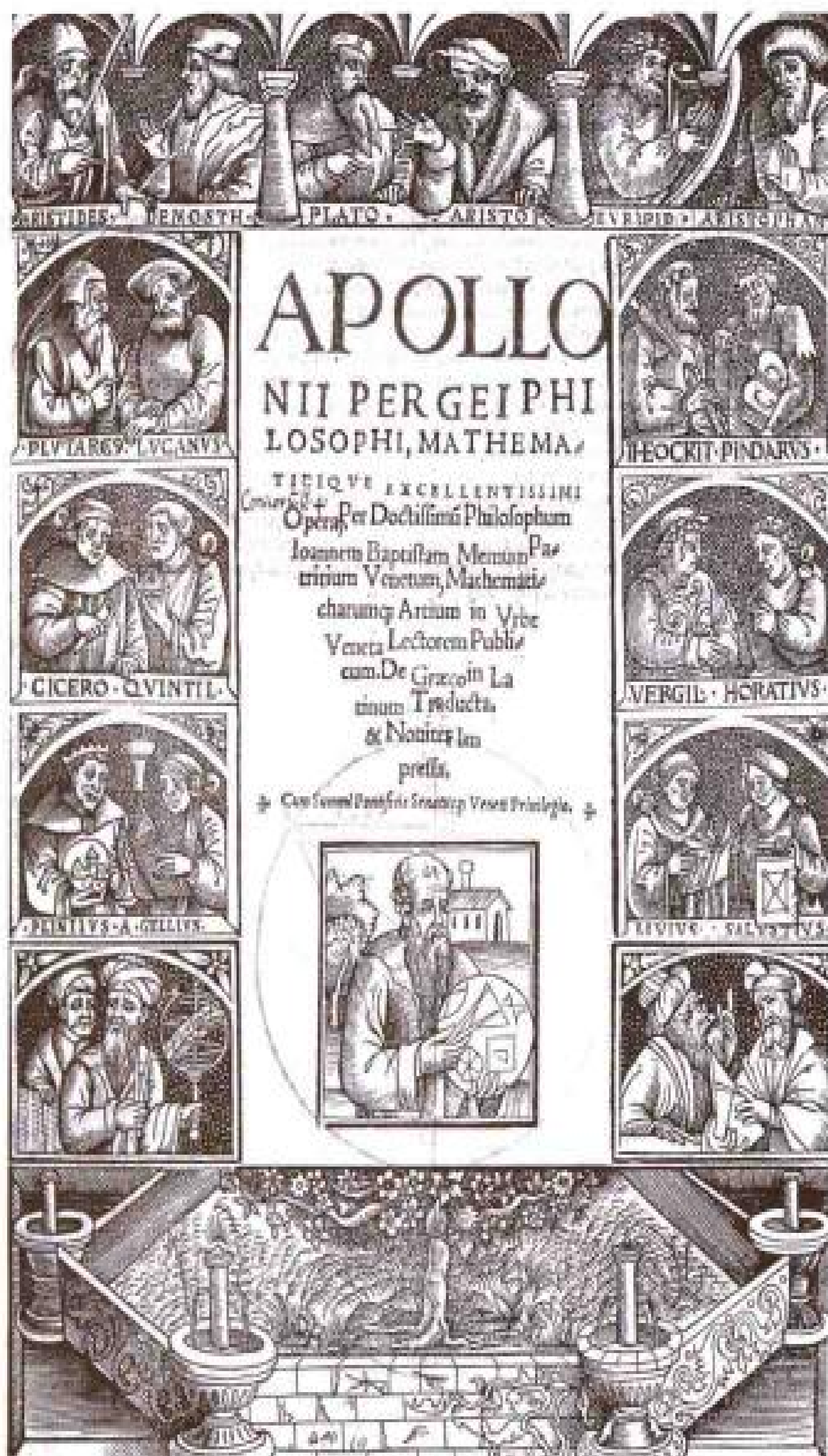
此木刻画取自G·冯·珀巴什（G. von Peurbach）的著作《行星新论》，该书作为巴黎大学的一种教科书由奥隆斯·芬纳（Oronce Fine）出版（1515年）．在16世纪末叶之前，书中对天空的描述是得到公认的；甚至哥白尼也在很大程度上受到这部著作的影响．珀巴什描绘了托勒密行星模型的密实球面表示，所依据的可能是本·阿尔－海赛姆（Ibn al-Haytham）的著作《世界的构型》（在13世纪翻译成拉丁文）．欧几里得的《几何原本》的前四卷的赛洛勃斯库（Sacrobosco）版（巴黎，1521年）都采用这相同的卷首页．

——柏拉图数学学派的一个成员．在公元前4世纪的雅典城，该学派呈现其辉煌，那时正是伯里克里（Pericles）的黄金时代，即(古)希腊艺术、建筑、哲学的经典时期（雅典的卫戍城正在那时建成）之后不久．

柏拉图是苏格拉底（Socrates）的学生，他在雅典的圣区创办学园，名曰赫卡德米［Hekademeia，以英雄赫卡德姆斯（Hekademos）命名］．后来的所有学园均由他的办学设置而得名．柏拉图的学园迁延千年左右，直至公元529年被君主查士丁尼（Justinian）解散．柏拉图的学园有点像一所小型的高等学府，在那里这位哲学家及其朋友们为学生讲课．两位最伟大的古代数学家——克尼特斯的欧多克索斯（Eudoxus，公元前408—前355年）和特埃特图斯（Theatetus，公元前420—前367年）就



阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线》第五卷的修订本之卷首页；由文森扎·维维安尼（Vincenzo Viviani）修订，其中有关于"斯坦纳问题"（见第92页）的附录．


APOLLO
NII PERGEI PHI
LOSOPHI, MATHEMA-
TICIQVE EXCELLENTISSIMI
Opera, Per Doctissimũ Philosophum
Ioannem Baptistam Memum Pa-
tritium Venetum, Mathemati-
charumq; Artium in Vrbe
Veneta Lectorem Publi-
cum. De Græco in La
tinum Traducta,
& Nouiter Im
pressa.
Cum Summi Pontificis Senatusq; Veneti Priuilegio.

阿波罗尼奥斯的作品集之卷首页，由梅默斯（J.B.Memus）从其希腊文本译成的拉丁文本乃由宾多尼（B.Bindoni）出版(威尼斯，1537年)

是这个学园的成员. 柏拉图虽然不是数学家, 但他重视这门学科, 以致要求每个学生花费十年时间学习数学学科、花费五年以上时间学习哲学. 据说这个学园入口处的标记上写着: "不让不了解几何学的人来到这里."

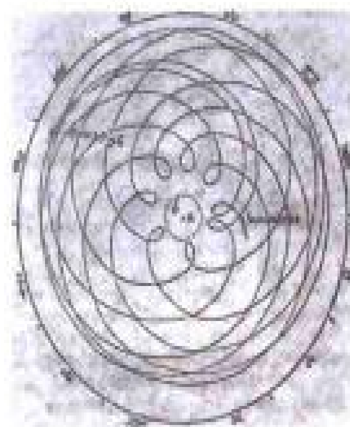


托勒密用扇形四分仪观察星星, 他与一个讽喻式的天文学家在一起. [取自格里戈利乌斯·赖施(Gregorius Reisch)的《新哲学精萃》(斯特拉斯堡, 1512年), 此乃哲学和科学的一种早期摘要本]. 那时托勒密被常常说成是一位国王, 因为人们误以为他是亚历山大之后、统治埃及的托勒密王朝的后裔.

传闻柏拉图向他的学生提出如下课题: 凭藉各种圆运动和球面运动的组合来解释天体的运动. 特别是, 柏拉图并不把值得重视的天文学看作是对农夫和水手同样有用的实用性学科. 按照他的见解, 几何学家只留意运动场; 对他们来说, 有趣问题源出于此.

对于行星运动, 有什么问题难住了? 在地球上观察, 行星的运动显得十分复杂. 太阳和月亮的运动都能大致描绘成以恒速运行着的圆周运动; 但是运行轨道与圆周有所偏差, 这使希腊人颇为困惑. 他们为寻找对于这种不规则性的解释而感到棘手. 观测到的行星轨道甚至更为复杂: 当行星运行了一周, 有一段时间反转了方向, 然后再反转方向而向前运行, 其间速率都改变了. 希腊人企图用几何模型理解这种表观上杂乱的运动.

欧多克索斯研究了这个问题, 提出了一个关于天体运动的精巧的纯几何理论; 但该理论有严重的缺陷, 不能解释许多经验资料. 因此, 在公元前3世纪, 佩尔加的阿波罗尼奥斯提议, 必须用圆运动的组合方式、把天体运动解释成外摆线形式. 这种想法导致以后两千年间最重要的天文学理论. 公元前2世纪, 古代最伟大的天文学家——喜帕恰斯(Hipparchus)对此作了详细探讨. 我们从著名的《数学文集》中了解喜帕恰斯的工作; 该书由希腊天文学家——亚历山大里亚城的托勒密于公元2世纪所著, 被中世纪阿拉伯语系的天文学家们称作《至大论》. 这部书完成了天文学的几何体系, 它后来以托勒密体系而著称. 托勒密理论在中世纪被那么广泛地接受, 以致被认为此乃由上帝直

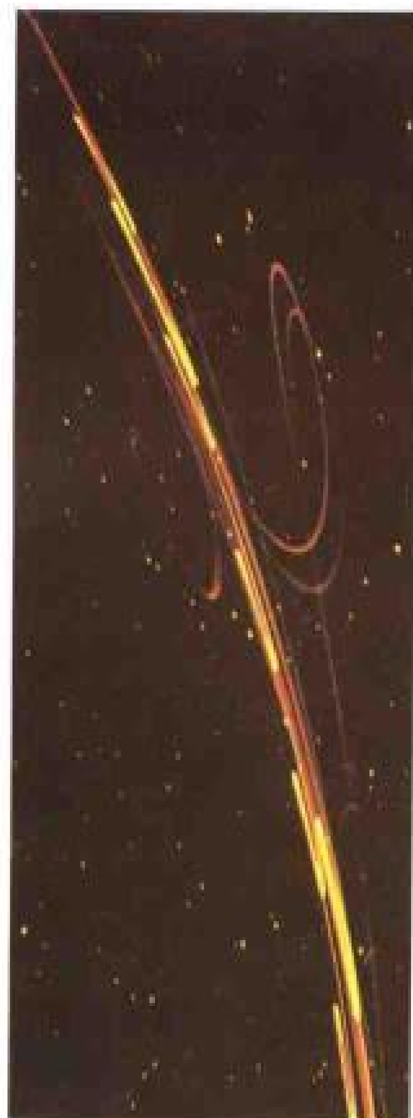


火星的运动. 取自开普勒: 《新天文学》(1609年)第4页.

接交付给人类的.

日心系 哥白尼、伽利略和开普勒

希腊天文学家把地球、而不把太阳置于我们宇宙的中心，这并不奇怪. 因为太阳每天早晨升起、傍晚落到地平线以下. 但是或许会猜测，希腊人为什么不至少试试采取把太阳置于宇宙中心的日心系[2]解释呢？事实上，萨摩斯岛的阿利斯塔克(Aristarchus)在公元前3世纪已经设想过这样一种体系. 他说：地球和其他行星都沿着圆形轨道绕着固定不动的太阳运转着. 他的假设因诸多因素而未被人们接受：希腊人不能解释为什么物体能停留在运动着的地球上，为什么人们感觉不到地球在运动，为什么浮云不落到运动着的地球的后面. 用这些理由反对日心说几乎达二千年之久；二千年之后由天文学家尼古拉斯·哥白尼（Nicolaus Copernicus）重新提出这个学说.







行星的表观运动. 此照片显示水星、金星、火星、木星和土星的运动. 而图中所示的是从地球上观察到的行星轨迹；尝试以托勒密理论对其作出解释.

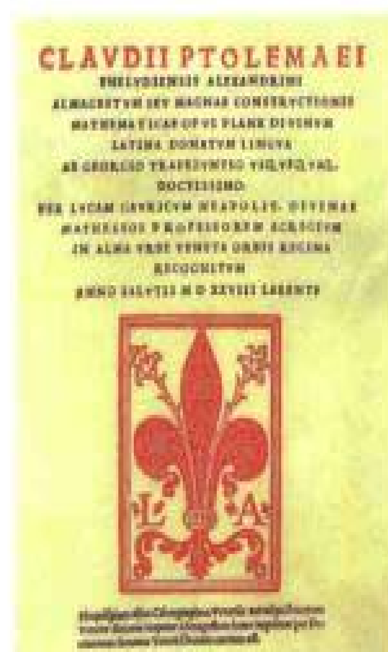
哥白尼生于1473年，曾就读于克拉科夫大学，尔后到意大利的布隆那，该城后来成为欧洲的科学中心. 在那里他学会如何进行天文观测，并把天文观测当作生活休暇时的一种消遣. 他的研究成果是一部确乎惊人的著作，题名《天体运行论》. 书中他提出了宇宙的日心说；该学说导致科学中的"哥白尼革命". 然而，哥白尼谨慎地推迟发表他的观点，直至1543年临近辞世之际才出版了他的著作. 的确，这本书最终还是被列入天主教的禁书目录（1606年）.

伽里莱·伽利略（Galileo Galilei）的遭遇既不像哥白尼，也不像乔达诺·布鲁诺（Giordano Bruno）那样——审讯后被活

[2] 毕达哥拉斯的信徒菲洛拉斯（Philolaus，公元前5世纪）提出如下想法：地球与太阳、月球以及五个行星绕着某一虚设的发光体运转；并且，他还引进一个虚设的副地球，从而使行星的个数增为10，此乃神圣的毕达哥拉斯数.

活烧死（1600年），但亦厄运难逃．教会对哥白尼的观点愈益加剧其抨击，因为此观点是对教会之思想统治的异议．1632年，伽利略出版了一部著作：《关于（托勒密和哥白尼）两大世界体系的对话》，从正反两方面分析了日心说．这部书把伽利略引向与教会对抗的地位；于是，在他七十岁那年，教会对他审讯、判罪，责令其忏悔、撤消其所信仰的学说，并将其软禁．

早在1602年，伽利略已经发现：重的石块和轻的石块下落到地面一样快．从而他得出力学定律：一切落体都以相同的速度变化率加速地抵达地面，只要空气的阻力可以忽略的话．他的著名公式 $s = 16t^2$ 乃指：落体下落 t 秒所通过的距离为 s（以



《至大论》（即《天文学大成》）的卷首页．最早由特雷比宗得的乔治（George）从希腊文译成拉丁文（1528年）．



尼古拉斯·哥白尼（1473—1543年）．此肖像由无名氏绘制（约1600年），藏于莱比锡大学图书馆．

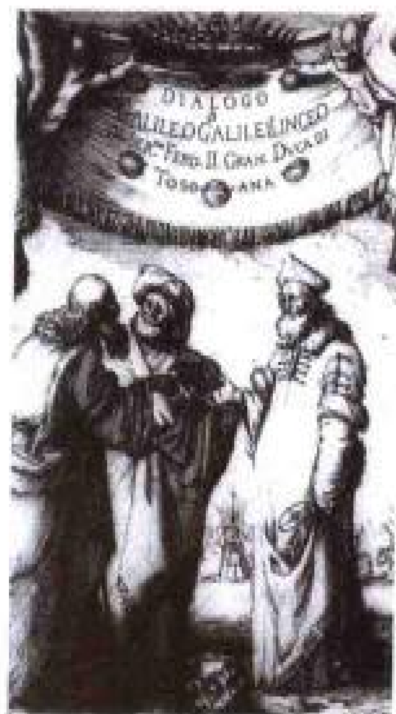
哥白尼所著《天体运行论》六卷本［约翰尼斯·皮特雷斯（Johannes Petreius）印制，纽伦堡，1543年］之卷首页．上有印制者的题词，此复本后来为开普勒所得．

伽里莱·伽利略（1564—1642年）．

英尺计量）．他因这一发现而解决了一个古老的运动问题——求取抛射物体在空中的轨迹问题；伽利略陈述并证明：这样的物体沿着一条形状类似抛物线的路径而运动，只是同样要忽略空气的阻力．这恐怕是科学史上第一次把圆锥曲线（不同于圆或直线）用于描绘物理现象．

但另外还有一次科学革命也来临了．德国天文学家约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler）剥夺了圆充当天体之唯一适当轨道的权利！他在蒂宾根大学学习之后，到奥地利的格拉兹大学成为数学和伦理学教授．1600年开普勒到布拉格当了著名的丹麦天文学家第谷·德·布拉赫（Tycho de Brahe）的助手．布拉赫已收集了大量新的天文资料，这些资料远远超过古希腊人所能得到

的．翌年布拉赫逝世，开普勒接替他作为君主鲁道夫（Rudoef）二世的“御前数学家”；鲁道夫二世住在布拉格．开普勒研究布拉赫的观测资料，不得不作出如下结论：行星并非沿着太阳在其中心的圆轨道运行，而是沿着椭圆轨道运行，太阳在其一个焦点处．椭圆第一次进入天文学．这种实在的椭圆，阿波罗尼奥斯早在两千年之前就已经将其作为纯粹的数学对象而研究过了．



伽里莱·伽利略的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，由雷迪尼（G.B.Landini）出版（佛罗伦斯，1632年）．这部为哥白尼学说辩解的名著在1823年之前一直被列为禁书．这幅画由斯特费纳·德拉·贝勒（Stefano della Bella）制版，置于伽利略的这本书的卷首页之前，画中描绘了托勒密（中）和哥白尼（右）．

椭圆轨道定律只不过是开普勒发现的行星运动的三条基本定律中的第一条．这位伟大的天文学家已经意识到宇宙内含的数学结构；但又总是按照观测事实校正其理论．诚然，对数学和谐性的追求使他展开科学想像的翅膀，他最终便得出名闻世界的第三定律．该定律说：行星沿其椭圆轨道一周所需的时间T的平方与椭圆轨道的半长径a的立方成正比．用数学术语言之：存在某一与行星无关的数K，则有$T^2=K\cdot a^3$．

开普勒第二定律乃指：如果行星在一段时间里从A点运行到B点，又在相同的时间里从A'点运行到B'点，那么扇形SAB和$SA'B'$的面积必定相等（见第63页右上图）；换言之，行星“在相等的时间里扫过相等的面积”．这就解释了为什么行星或彗星在靠近太阳时走得快．例如，哈雷彗星沿着轨道走完一周需76年时间，但掠过太阳只需几天．



约翰尼斯·开普勒（1571－1630年）

这些美妙定律的发现算得上是人类最伟大的成就，开普勒在其《宇宙和谐论》（1619年）中写道：

> 上帝的智慧无穷，上帝的荣耀和威力也无穷．星空茫茫，为上帝而歌唱！太阳、月亮和星星用人类无法形容的语言赞美上帝！它们以空中的和谐来赞美上帝；汝等都悟出这空中的和谐乃上帝之神工所铸．上帝，我的灵魂！您的创世神工令人惊叹不已，万物乃上帝所创造，万物乃上



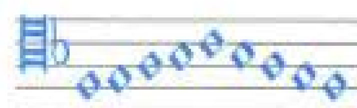
第谷·德·布拉赫的尤拉尼勃格（Uranibong）天文台，位于丹麦汶岛。此画由基利安（Kilian）制版，取自《天文史》，该书由西蒙·尤兹希尼德（Simon Utzschneider）印制（奥格斯堡，1666年）。第谷积累的大量天文观测资料几乎都被开普勒用来制成鲁道夫（星）表；此表在第谷死后六十余年间未予发表。



土星



木星



火星



地球



金星



水星



月亮

毕达哥拉斯相信，天空中的星球旋转时会发出和谐的声音。这里模拟的是开普勒所想像的行星音乐。

帝所包容。我们所认识的事物，最好的总归因于上帝，除自负的科学之外唯上帝有此功劳。因此，我们赞美上帝、崇拜上帝、为上帝而骄傲，且永无尽期。

可见，从毕达哥拉斯和欧多克斯的球，以及阿波罗尼奥斯、托勒密和哥白尼的圆，推进到伽利略的抛物线，直至开普勒的椭圆。伊萨克·牛顿（Isaac Newton）取得巨大成功的万有引力理论乃基于开普勒和伽利略的成果。从牛顿引力论出发，欧拉导出一条描述行星围绕太阳运转的最优性原理。欧拉的工作由拉格朗日、哈密顿和约可比进一步发展。他们的工作成果导致变分原理，藉此全部经典力学才得以建树。这故事还可引向原子物理学、量子力学和广义相对论。可是在对此详加讨论之前，让我们重又转回古代去。

开普勒第二定律

黛朵女王问题

圆的极大性质颇为有名，在古代已为人们所知，这与关于迦太基的黛朵（Dido）女王的一个故事有联系；罗马诗人维吉尔［Vergil，恩佩洛·奥古斯都（Emperor Augustus）的同时代人］在其著名史诗《埃涅阿斯纪》中述说了这个故事。

黛朵是出身于泰尔城（现属黎巴嫩）的腓尼基族公主。她的残忍的兄弟——毕格梅林（Pygmalion）国王为霸占其财产而谋杀其夫，她则乘船逃离泰尔。大约在公元前900年，黛朵抵达非洲的后来成为迦太基城的地方；她意欲向当地首领——努米底亚的贾培斯（Jarbas）国王购买土地，以使自己及其随从臣民安顿下来并建造新的家乡。可能是因为黛朵出于节俭，或者贾培斯不希望在自己的国土里有任何新的殖民者，双方达成协议，条件是：女王仅仅获得用一张公牛皮可能包围成的那么多土地。

约翰尼斯·开普勒以他独特的笔法所写的颂扬哥白尼的诗。开普勒将这首诗写于他所得之《天体运行论》的一个复本内。该复本藏于莱比锡大学图书馆。

黛朵充分利用这个条件．她首先把"包围"一词解释成尽可能的广阔．想来她让人把牛皮切割成狭条，并把狭条连接起来，从而做成一条很长的闭合圈；若其宽度小至1/10英寸，则其长度在1 000码和2 000码之间．

接着，她把这条皮带圈放在地上张开，以围成最大可能的面积．假定地面是完全平的，则可想像黛朵已经解决了如下这个数学问题："在给定长度的所有可能的闭合曲线中确定哪一条所围成的内部区域的面积最大．"我们是可推定，黛朵找到了正确答案：乃是一个圆，其周长即为给定长度，故而所得之面积在25英亩和60英亩之间．如果这皮带的两端固定于地中海的一段假想的笔直海岸线上的两点，那么黛朵甚至会获得更多的土地，张开这皮带则形成为一个半圆．就此说，这故事确实证明了黛朵之所为．倘若你看看中世纪欧洲的一些用城墙围起来的城市之地图，就会明白那些城市的居民一般都会得出与黛朵相同的结论．

维吉尔对于建造伽太基城描绘如下：

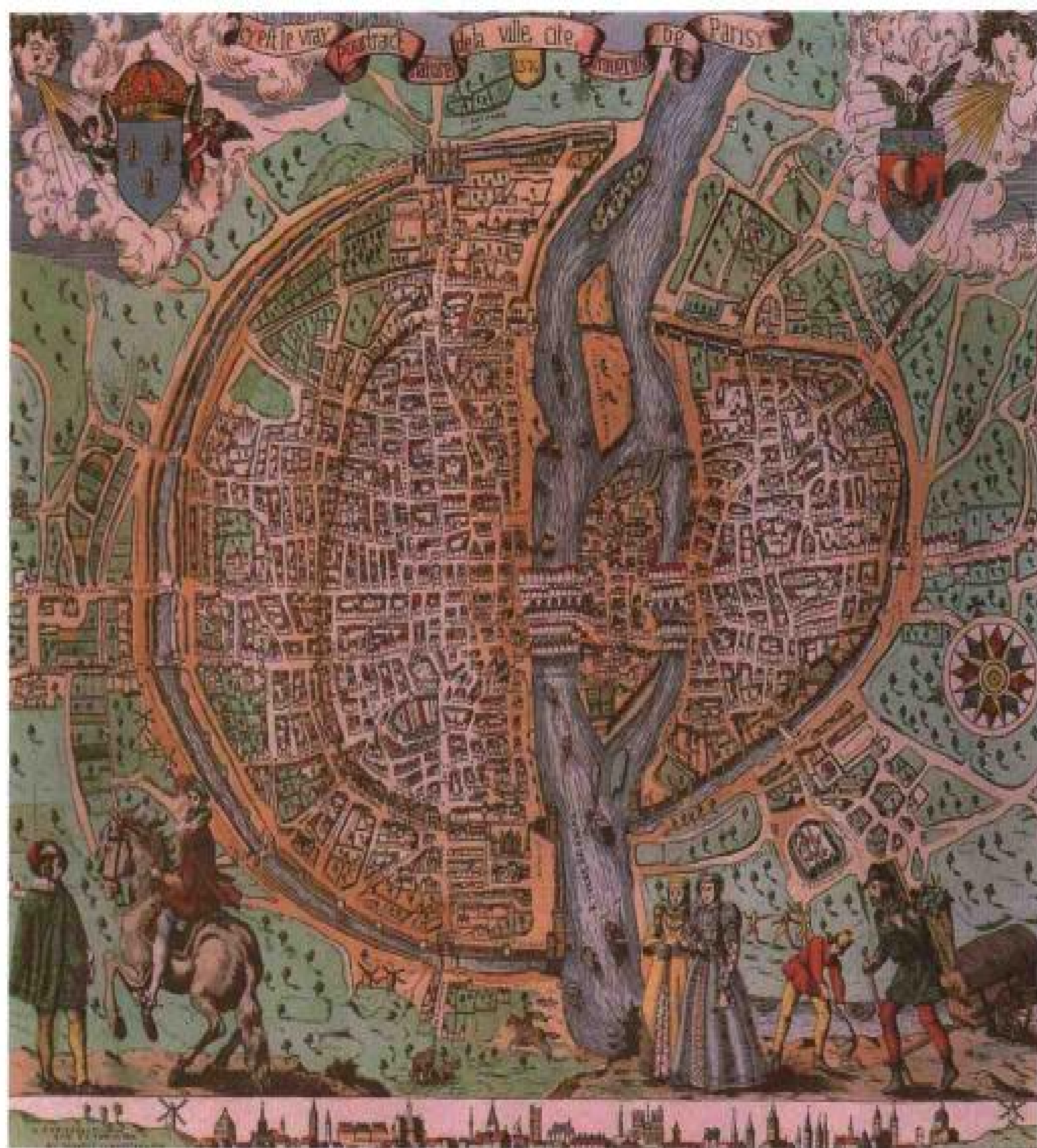
他们来到那里，
　　正如你而今看到的新迦太基，
　　它的城墙高筑、城堡壮美，引臻伟奇；
他们购进的土地今名已被，
　　乃为建城而作成交易；
至于"毕特"一词，
　　正得名于黛朵当年土地交易；
他们竟用一张公牛皮，
　　围成那么大的一片土地．



黛朵为建造迦太基城而购买土地，她的子民把一张公牛皮切割成狭条，试图将其围成最大的区域。此画取自《编年史》（佛朗克福，1630年），由梅里安（M.Marian）制版。

罗马作家尤斯蒂努斯（Justinus，公元前二、三世纪）描述得更细致：

> 艾丽莎（黛朵）首领把牛皮切割成最狭的长条，于是她得到了一大片土地，比她所觊觎的更大。



中世纪的巴黎地图.

希腊人很了解这个称为"等周问题"的数学课题[1]，他们探讨这个问题有其明晰的实际缘由. 譬如，依据绕着岛屿四周航行所花费的时间，可能推测岛屿的大小吗？如第69页的右图所示，显然会有过度的偏差.

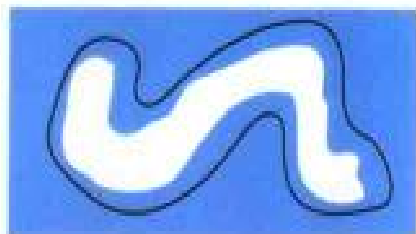


中世纪的科伦（德国西部城市）地图.



黛朵和埃涅阿斯眺望迦太基城，由克拉特·洛雷恩（Claude Lorrain，1600—1682年）绘制.





绕着岛屿的四周航行.

机敏人知晓，一块小周长的土地，其面积可能比另外某一块大周长的土地大；因此，在交换土地时，他们以如下方式诈骗不太聪明的人：只要用绕着土地四周行走所花费的时间来测量土地的大小. 普洛克勒斯（Proclus）大约于公元450年，在评注欧几里得的《原本》第一卷时说明过这种情况. 后面我们还将回过头来讨论等周问题，读者将会明白这是数学史上最有刺激性和影响力的问题之一.

顺便说说维吉尔的史诗《埃涅阿斯纪》中特洛伊城的埃涅阿斯（Aeneas）的故事. 他的城堡被阿凯姆（Agamemnon）国王攻占后，便带着若干随从乘船逃离. 从小亚细亚经过地中海，最终抵达意大利，在那里建造了罗马城. 途中，埃涅阿斯停留迦太基，与黛朵相遇. 黛朵钟情于他，并要与他结婚. 但是主神前来干预，命令埃涅阿斯离开黛朵. 黛朵在绝望中自尽. 鉴此，但丁在其史诗《神曲》中将她判罪，打入地狱第二圈. 英帝国兴起之时，亨利·珀塞尔（Henry Purcell）在其剧本《黛朵和埃涅阿斯》中重述这个故事. 让我们听听但丁的《神曲·地狱篇》之"第五歌"中所述*：

现在悲哀的声音开始
　　传到我的耳朵；现在我来到
　　很多的哭声向我袭来的地方.
我进入了一处完全无光的地方，
　　它像汹涌的大海那样呼啸，
　　当大海和狂风搏斗的时候.
地狱的暴风雨，无时休止，

[1]圆的等周性之证明最早见诸于塞翁（Theon）对托勒密之《至大论》的注释本以及帕普斯（Pappus）的一些著作中. 作出证明的乃是泽诺多洛（Zenodoros），他必定是阿基米德（公元前212年逝世）和帕普斯（约公元340年）之间那段时间里的人物，因为他引述阿基米德，而被帕普斯所援引. 但泽诺多洛的证明尚有缺陷，并不圆满；直到19世纪后半叶，德国数学家外尔斯特拉斯（Weierstrass）在柏林大学的演讲中才给出了完善的证明.

*这里所载的一大段诗章乃采用朱维基所译《神曲·地狱篇》之译文（上海译文出版社1984年版第32—33页）. ——本书译者注

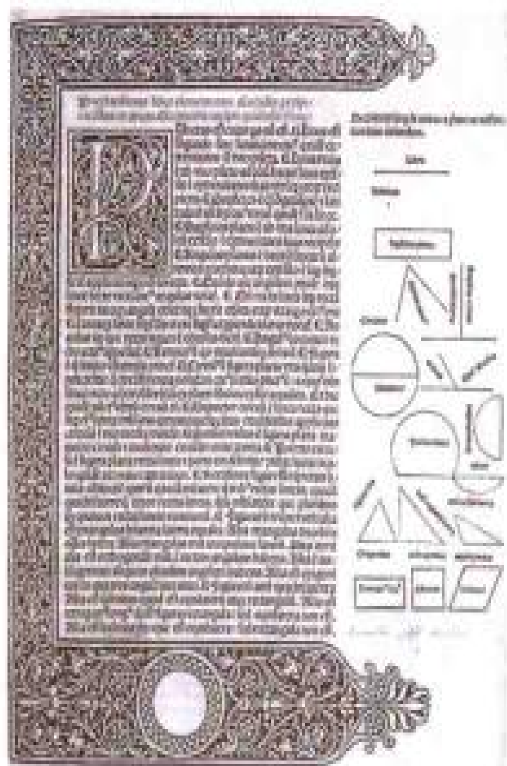


埃涅阿斯和黛朵：取自《罗马人维吉尔诗集》抄本 3867（可能从公元 6 世纪起）. 此抄本乃是罗马后期很少几种彩绘范本之一.

把那些阴魂疾扫而前；席卷他们，
鞭打他们，以使它们苦恼，
当他们来到灭亡面前时，
那里就有尖叫声、呻吟声、哀哭声，
那里他们就咒骂神的权力，
我知道了这种刑罚
加于肉体上犯罪的人，
他们使理性受淫欲奴役，
如同在寒冷的季节，大群的椋鸟
结着密集的队形鼓翼而飞；
那阵狂风就像这样把不良的精灵
吹到这里，吹到那里，卷下，卷上，
从没有希望来安慰他们，
没有休息的希望，
就连减轻痛苦的希望都没有，
如同群鹤在天空排成长行，
一声长唳，横越而过；
我看到那些幽魂那样来到，哀哭着，
为搏斗着的风所卷来；
我说道："夫子，这些人是谁，
他们这样地为厉风所抽打?"
于是他回答："你想要知道的
这些幽魂中的第一个，
是统治许多种族的女皇，
她在穷奢极欲中变得那么无耻，
在敕令中把荒淫视同法律，
以摆脱她所遭到的指摘，
她是塞密拉密斯，我们读到
她是尼那斯的妻子和继承者；
她保有苏丹王所统治的国土，



埃涅阿斯离开黛朵：此木刻画描绘维吉尔的史诗《埃涅阿斯纪》第四卷第566—607行的情节，取自维吉尔最早的插图本，由人道主义者、诗人塞巴斯蒂安·布兰特（Sebastian Brant）编辑，由格吕宁格尔（J.Grüninger）印制（斯特拉斯堡，1502年），这个版本被誉作"有史以来最精采的插图本之一"。



欧几里得的《原本》第一版由埃哈德·拉多尔特（Erhard Ratdoet）印制（威尼斯，1482年）.

那另一个是在爱情中自杀，
对西丘斯的尸灰失节的女人*.

光的反射定律，阿基米德的火镜

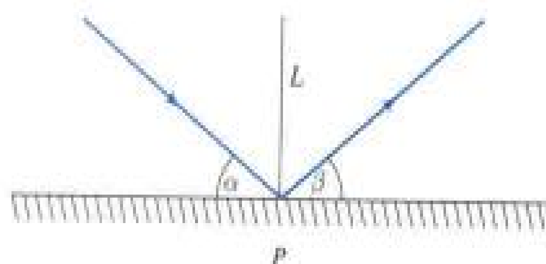
已用物理学中第一条最优性原理解释了曲面镜上的光反射现象.

从毕达哥拉斯在世时起，希腊人已经对光线作过考察. 早在公元前490年，阿格里根图姆（在西西里岛）的恩培多克勒（Empedocles）说过，光以有限的速度穿过空间. 这个值得注意的正确见解却未被人们确认；直到1676年，丹麦天文学家、数学家奥莱·勒默（Ole Rømer,1644—1710年）才证实了这个见解.

在希腊化时代对于光的大部分知识都见诸于欧几里得（约公元前330—前270年）的一部著作. 欧几里得住在亚历山大里亚城，该城由国王亚历山大（Alexander，他不幸被称作"大帝"）于公元前331年建在尼罗河上. 在托勒密王朝，该城成了世界的科学中心，之后并持续了五百年之久. 公元前338年雅典城邦陷落以后，亚历山大里亚变成希腊文化的焦点所在. 在这个都市，知识会聚起来，又传播到整个古代世界. 大约在公元前285年博物院（司文学、艺术、科学等的"九女神之神殿"）建立；这是一个让学者在其中工作、学习的文化机构. 该博物院的著名的图书馆在鼎盛时期藏有手稿大约竟达750 000份之多. 欧几里得在亚历山大里亚写下他的（数学）《原本》；此乃西方世界流传最广的一本书（据悉现存1 700个版本）.《原本》

*即指黛朵，当埃涅阿斯离开她，往意大利而去，她便扑身火葬堆上自杀. 西丘斯（Sichaeus）是她的丈夫. 上面诗节中的塞密拉密斯（Semiramis）是神话里亚述的皇后、尼尼微帝国的缔造者尼那斯（Ninus）的妻子和皇位继承者. ——参见朱维基中译本《神曲·地狱篇》第34页之脚注.

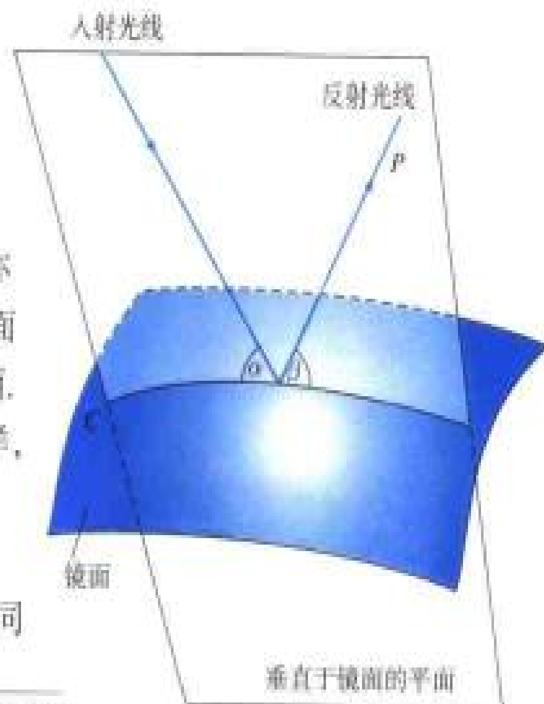
共十三卷，欧几里得在其中收集了他那个时代最多的数学知识，从而凝炼成一部具有明晰的逻辑系统的杰作.《原本》基本上是一部几何学著作，但也包含数论方面的一些定理和计算面积和体积的一些结论．据说亚历山大里亚的国王托勒密·索特尔（Ptolemy Soter）问欧几里得：除了读《原本》外是否有学习几何学的其他捷径？这位数学家的回答为众所周知："没有专为国王铺设通向几何学的大道."



入射角 α 等于反射角 β.

除《原本》之外，欧几里得的其他一些留传下来的著作包括《光学》和《反射光学》[1]（"反射镜理论"）；直至17世纪，二者总是作为几何光学的基础，犹如《原本》作为数学的基础一样.

欧几里得在《光学》一书中陈述："光在空中乃沿着直线而行进."然后他借此结论和其他成果讨论视觉的本质．在《反射光学》中他给出了反射的基本定律，此乃指关于光线照射到镜面并由其反射的如下两项定则：



曲面镜的反射定律：$\alpha=\beta$.

- **定则 1** 光线的入射面与反射面相合.
- **定则 2** 光线的入射角与反射角相等.

假定入射光线射于镜面 P 点，并设垂直于镜面的 L 线亦通过 P 点（右上图）．那么，包含入射光线和垂线 L 的平面称为入射面，而反射面则为包含反射光线和这垂线的平面．且看入射光线和垂线之间的锐角，其余角即为入射角．同样，反射光线与垂线之间的锐角的余角就是反射角.

根据定则 1，入射光线和反射光线均在垂直于镜面的同

[1]《反射光学》可能不是欧几里得的天才著作，但后来的著作家们把该书归于欧氏所著．因此，不知道是谁发现了反射定律，但看来阿基米德是肯定了解的.

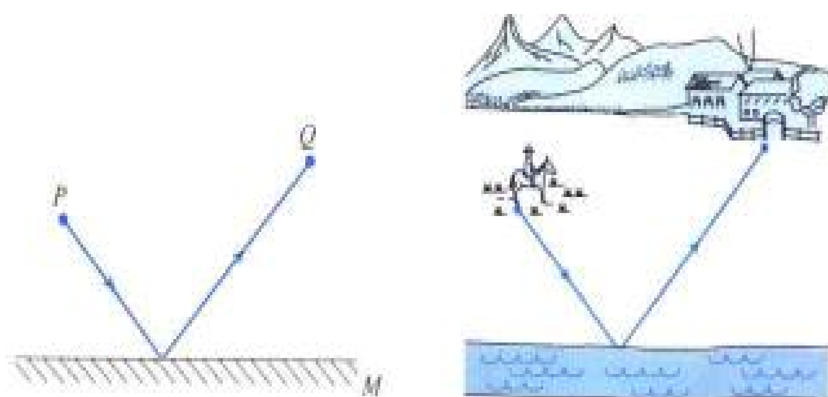
从P点经过M线到达Q点，哪一条是最短路径？就是说，一个牛仔骑马回家，又想让马到河边饮水，该走哪一条路径最短呢？



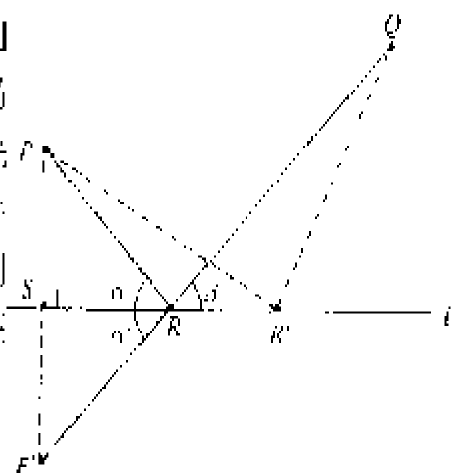
一平面内．垂直平面与镜面截交成平面曲线C；对于平面镜而言，这C线便为一直线．反射光线的构成只不过是平面问题，此问题在包含曲线C的平面内即能轻易地解决．根据定则2，该平面内入射角与反射角必定相等．这样，凭藉平面曲线便可解决光线的反射问题．

欧几里得之后大约四百年，亚历山大里亚的科学家赫伦（Heron，约公元前100年）看出，在反射定律的背后还有更基本的定律．他说：反射定律源于这样一个原理——光必定总是沿着最短的路径行进．为了说明这点，且考察平面镜的反射问题；看来这等价于光线在直线上的反射问题．所以，且假设在曲线的一边有两点P和Q，我们想从P点出发，抵达曲线处，然后再行进到Q点．于是我们的问题就变成，要完成这段行程，能找到最短的路径吗？

骑马饮水问题的解答．



上述数学问题可以设想成略有不同的"现实世界"中的问题。假设大草原上有一个牛仔，黄昏时分想回转牧场，但他的马很渴，牧场与牛仔在一条笔直河流的同一边。他想回家，又想先让马到河边饮水，那该走哪条路径最短呢？赫伦的回答是：牛仔必须沿着直线从 P 点走到河边的 R 点，再沿直线从 R 点走到 Q 点；R 点的选定是使其入射角等于反射角。赫伦定理的简短证明由右图给出。



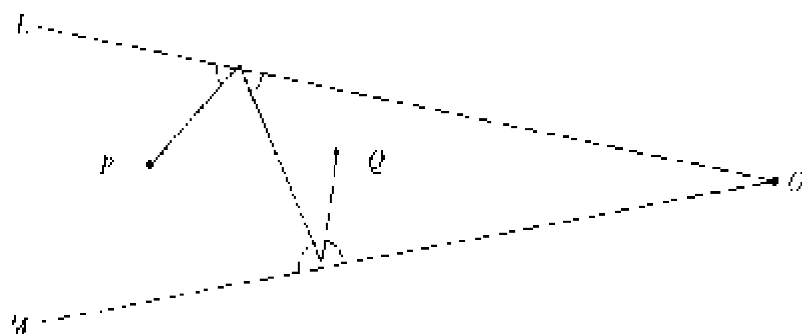
赫伦定理的证明。因为直线是两点之间的最短联线，故而可认定最短的路径是直线路径。设最短路径与 L 线相交于某一点 R。为了找到 R 点的位置，从 P 点出发画出 L 线的垂线，其垂足为 L 线上的 S 点。在此垂线上从 S 点出发向 L 线的下方截出一段，其长度等于 $\overline{PS}$ 的长度，从而得到 P' 点。通过 P' 点和 Q 点作直线，与 L 线的交点为 R。然后画出 P 与 R 的联线，便可看出 R 点处的三个角 α、α' 和 β 均相等。令 R' 是 L 线上另外一个任意点。由于三角形两边之和大于第三边，故而得出：PRQ 是联结 P 和 Q，并触及 L 线的最短的可能路径。

什么路径最短？这确实是一个十分自然的问题。在某些场合，我们往往要赶快抵达某处，所以渴望找到一条最短的可能途径。前述问题可通过多种可能方式推广到一般情况。例如，设两条直线 L 和 M 之间有两点 P 和 Q（见下图）。我们会问：哪一条是从 P 出发，并先触及 L 线，然后触及 M 线，最后抵达 Q 的最短路径？答案是一条满足在 L 线和 M 线上的反射定律的折线。

在第一个例子里我们考察了直线上的反射，这相应于平面镜的反射。希腊人还研究了在曲面镜上或在包括圆锥曲线在内的曲线上的反射问题。

且从椭圆开始讨论。如前文所述，希腊人知道椭圆有两个焦点；譬如说，设焦点为 P 和 Q。此焦点有一个引人注目的性质：

对于椭圆上的所有点 R，从该 R 点到 P 点和 Q 点的距离之和 $\overline{PR}+\overline{QR}$ 都有相同的数值；譬如说，设该值为 d。



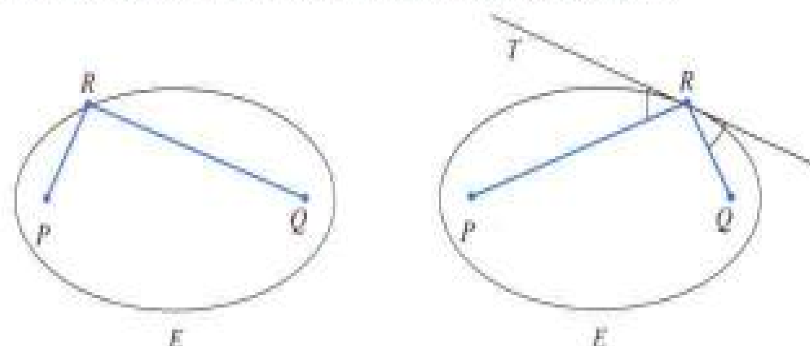
两点 P 和 Q 之间，并先触及 L 线，然后触及 M 线的最短路径。

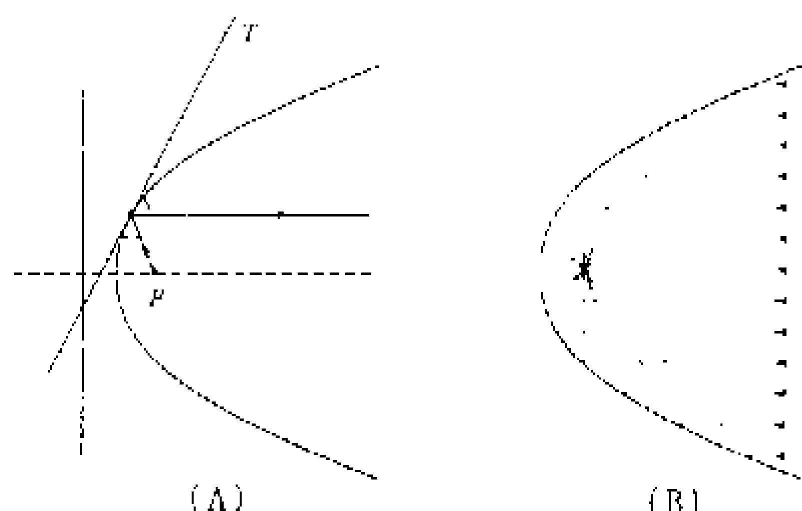
再则，对于此椭圆平面内的任意点R，和值$\overline{PR}+\overline{QR}$或者小于$d$、或者大于$d$、或者等于$d$，乃视$R$点分别位于椭圆之内、或者之外、或者之上而定.

在椭圆上的某一点R画一条切线，如下图所示. 那么上述椭圆的这一性质恰恰意指：从P到R，再到Q的折线必定便是从P到Q，中间抵及切线的最短可能路径. 按照赫伦的结论，极小路径性质即暗示了反射定律；则就明白，入射角必然等于反射角. 这便表明，一束光线从椭圆的一个焦点处射出，会以如下的方式被椭圆反射：所有的反射光线均通过椭圆的另一个焦点. 若把椭圆绕其主轴（通过两个焦点的直线）旋转，便得到一个椭球面镜. 这种镜子有一个使人惊恐的性能：如果将强光源（诸如太阳）置于其一个焦点处，那么光线就会集聚到另一焦点处，把放在那里的任何东西烧毁.

抛物面镜具有同样的燃烧性能. 在某种意义上说，抛物线可以看成是两个焦点中的一个移至无限远处的椭圆. 所以，从焦点射出的所有光线在被抛物线反射后会形成一束平行光. 设想相反的情况——就是说，从很远处（譬如从太阳）射来许多光线. 这些光线其实是相互平行的；那么，抛物线会将它们反射，使其集聚于一点，即抛物线的焦点处. 若把平面抛物线绕其轴线旋转，就形成一个三维的抛物面镜. 这样的镜子会把所有与其轴线平行的光线都集聚于焦点. 在该点处的任何东西都会很快地化为灰烬. 因此，太阳可能用作为恐怖的武器[5].

光线在椭圆内反射.





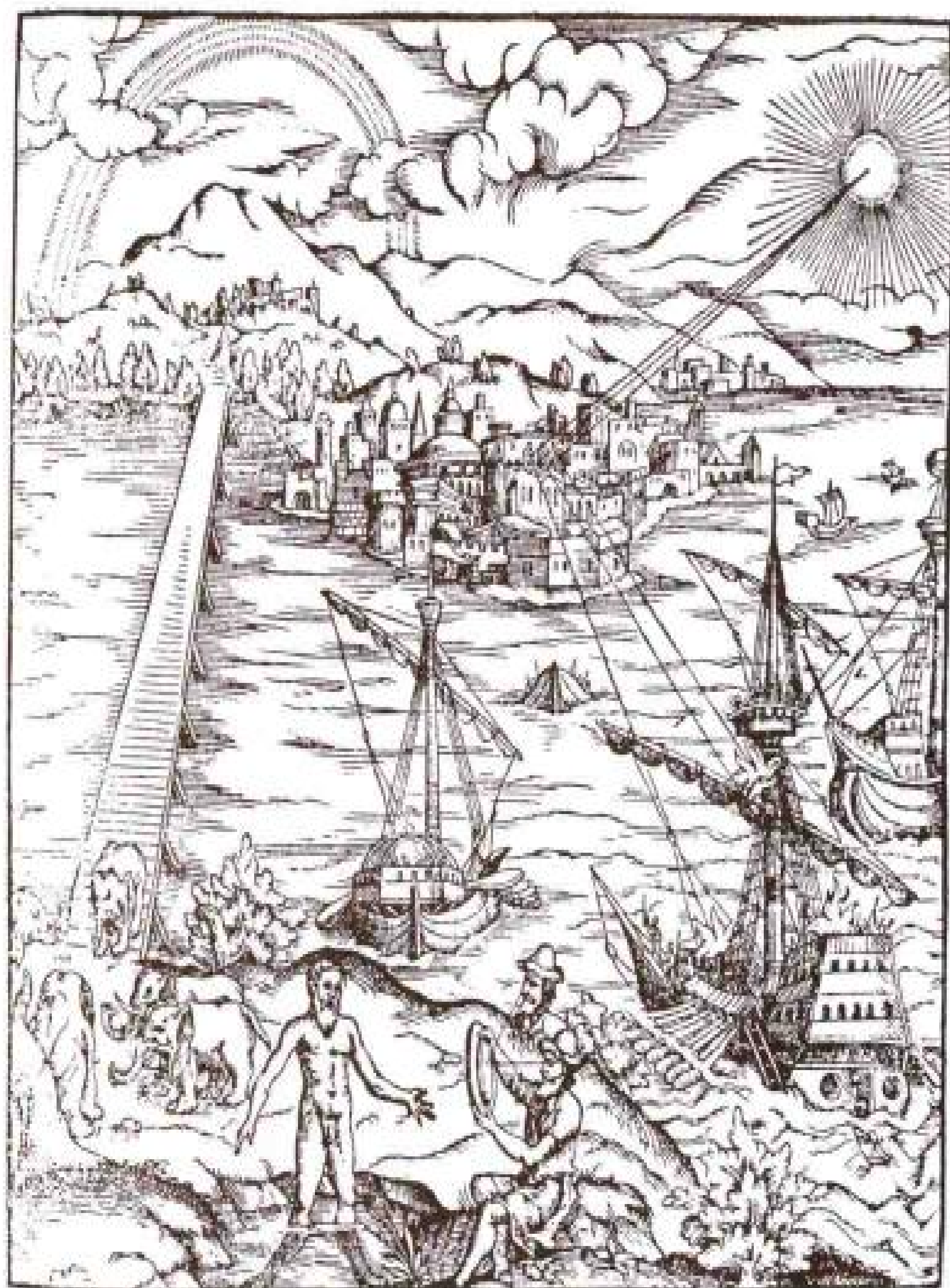
抛物线的反射：（A）抛物线的焦点为P；（B）所有平行光线被反射而通过抛物线的焦点．

公元前216年，西西里岛（乃希腊文明区域）的叙拉古城与迦太基城在对罗马之战中结成联盟；二者的联合致使在罗马与迦太基的三次布匿战争的第二次期间——公元前214年，罗马人雨攻叙拉古城．据传奇故事的传闻，藉助于阿基米德的"火镜"，这古城的百姓利用西西里岛夏日的骄阳烧毁了罗马的舰队．火镜是怎样的东西呢？

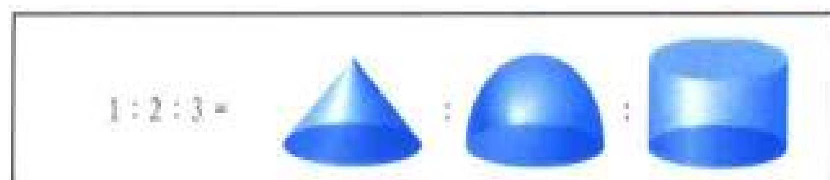
阿基米德（公元前287—前212年），古代最伟大的数学家，他为故土叙拉古城几乎耗尽了全部心血．据说他在亚历山大里亚博物馆完成其研究工作，但我们又只是肯定地知道他至少有一次到埃及访问过．

阿基米德的科学声誉来之于他的许多数学发现．例如，他找到π——半径为1的圆的面积——的一个出色的近似值．他能证明π必定是$3\frac{1}{7}$和$3\frac{10}{71}$之间的一个数．进而，他颇为不易地计算了一些物体的体积和一些曲面的面积，诸如半径为r的

*通常，不能把物体置于镜面的焦点处，又同时接收平行其轴线的太阳光线，以免燃烧起来；与此不同，使太阳光线与抛物镜面的轴线交成一个角度，那么光线反射后就不会集聚于一单个点，而形成一曲面——所谓焦散面或燃烧面．此曲面是一种很复杂的几何对象；但在一般情况下它往往有一个歧点，它原来是大部分光线都通过的一个围绕此歧点的小球．所以，靠近歧点的光线集聚得厉害；结果，燃烧效应很难避免．



13世纪波兰学者威特洛（Witero）的光学论文的卷首页。1572年，弗里德里克·里斯纳（Friedrich Risner）将威特洛的著作附加于他的《光学大全》一版中。由阿拉伯科学家阿尔－海赛姆（Al－Haytham，被译作拉丁文Alhazen，约公元965—1039年）在那篇著名的光学论文中批驳了希腊人的视觉理论（例如，希腊人以为视线从观察者眼中射出）；代之以他的依据光作用的视觉理论，并假定光以有限速度向各个方向传播。他的关于眼睛的结构和机能的理论直到17世纪也未被超越。



阿基米德定理：高度、半径相同的圆锥体、半球体、圆柱体的体积之比为1:2:3.

球的体积为$4\pi r^3/3$，其表面积为$4\pi r^2$. 实际上，他证明了具有同样半径和高度的圆锥体、半球、圆柱体的体积之比为1:2:3；该定理使他颇感自豪. 阿基米德的这些数学成果确实是当时令人震惊的成就.

阿基米德不仅是天赋非凡的数学家，而且是一位在机械工程上富有创造才能的人；他既受同时代人的赞扬，又为后来的著作家所称道. 在他的各项发明中，有一种扬水机械，即所谓“阿基米德螺旋”；埃及人用其灌溉田地、西班牙人用其从矿井里抽水. 还有所谓的“星球仪”，乃一组球面，其中用巧妙的机械装置模拟天体的运动. 这样的器械，其大尺寸复制品如今可能在一些大的科学博物馆里见得到. 足见它们在古代流传甚广，在现代也向人们作普及宣传. 作家克劳迪亚斯（Claudianus，约公元400年）描绘了罗马神话中的主神当见到由一位叙拉古数学家用一个玻璃球复制其工作成果时的惊讶神态；另外，西塞洛（Cicero）报道说，马赛拉斯（Marcellus）——公元前212年叙拉古的征服者把两个星球仪当作从这座被攻占城市得到的唯一战利品.

但是，阿基米德在古代声誉大振，倒并非出自于他那些平和的发明，而是因为他对叙拉古反对罗马人的战役作出了贡献. 公元前214年，罗马人围攻这座城市，遇到一劲敌，竟就是这位七十三岁的数学家. 他采用一些意想不到、功效无比的武器. 入侵的罗马军团被一种很有效的大炮袭倒；大炮射出长程石块和大量短程弹丸. 罗马船队被大吊钩击沉；大吊钩或者向船只甩击石块，或者用铁手抓起船头，尔后突然将其抛入水中. 普洛塔克（Plutarch）在其《马赛拉斯的一生》中记下这位罗马指挥官

对兵部队的发评：

> 我们难道还未结束对这几何上的百手怪物（希腊传说中有百手巨人*）的搏斗？它用我们的船只从海中舀水，它狠狠地打击"三角琴"（乃是罗马人用来攀越城墙的工具*），它用飞弹向我们大家迎面扑来，如此便一下子超越了这神话中百手巨人的威力。

罗马士兵害怕极了，普洛塔克写道：

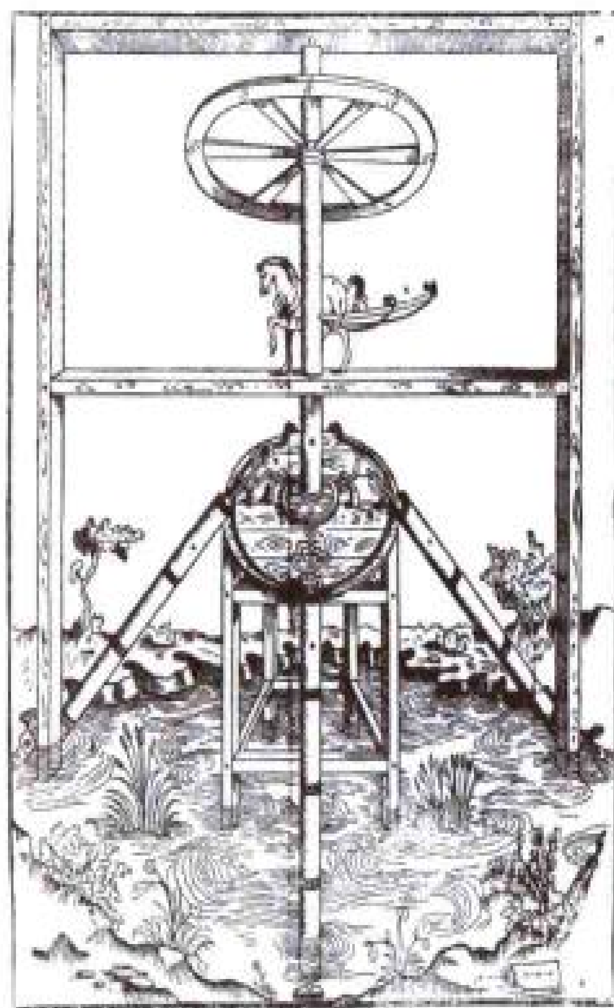
> 他们只要看到有一根绳索或一片木头伸出城墙，就会惊呼，阿基米德又发明了一种毁灭我们的器械！

但对于罗马士兵来说，最恐怖的事终于来临：他们的船只被阿基米德的"火镜"（或曰取火镜）焚毁了！这种镜子使用起来的真实情况如何？当时并无历史学家加以描绘，只是在很久以后写作的故事里才提到。伽伦（Galen，公元129—199年）第一次提及，他是古代除希波克拉底（Hippocrates）之外的两位杰出的医师之一。1200年，拜占庭帝国的历史学家齐特斯（Tsetzes），似乎并不是特别可信赖的作家，他设想了阿基米德所获得的成就：

> 阿基米德制造了一种六边形镜子，小的一种镜子带有二十四条边；当罗马的舰队进入一箭之地的范围，便将镜子置于适当的位置上，并可利用铰链和金属线圈使其移动。阿基米德对六边形镜如此安排：冬季和夏季时期的子午线将其二等分；那么太阳光被它接受、并反射，便燃起熊熊大火，把罗马的舰队烧成灰烬；即使敌兵驶出箭矢所及区域，亦难幸免。

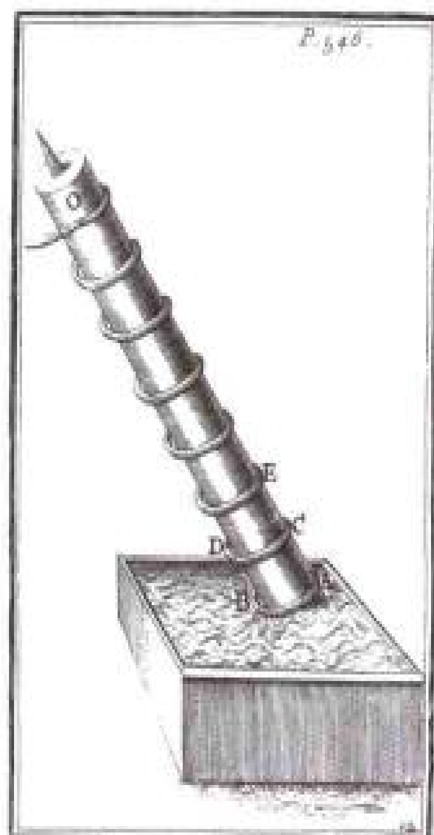
---

*本书译者的说明。



此木刻画取自吉斯帕·西雷迪（Guiseppe Ceredi）的一篇于1567年发表的论文. 西雷迪对建筑颇有兴趣，把阿基米德螺旋用于田地的灌溉和沼泽地的排水.

表示阿基米德螺旋之功能的略图［取自奥扎南（Ozanam）的《数学词典》，巴黎，1691年］.



这样布置的反光板竟产生与抛物面镜一样的效应. 公元6世纪，数学家和建筑师安西米纳（Antheminus）也猜测，阿基米德已采用了六边形镜. 但许多历史学家把这故事看作纯属虚构而置之不理. 对于阿基米德的这项辉煌成就，有声称要求承认的，有表示怀疑的，几百年中众说纷争不迭. 然而，阿基米德的这项设计之可行性已于1747年由法国博物学家乔治·布丰（Georges Baffon）以及由希腊工程师沃尼斯·赛克（Ioannis Sakkas）于1973年从实验上证实.

围攻叙拉古历经两年，此城最终因出了叛徒而被攻陷. 攻陷战的一项不幸后果是，阿基米德被一个罗马士兵杀死，尽管



阿基米德之死，马赛克画，可能出自拉斐尔（Raphael）学园.

指挥官马赛拉斯已要求士兵们不可伤了这位老科学家的性命. 传说阿基米德坐在家门口研究一些画在沙（盘）上的几何图形，一罗马士兵走近他，他便喝道："别弄坏了我的图!" 那恶棍觉得受到轻慢，就杀了这位伟人.

作为补偿，马赛拉斯为阿基米德树起一块墓碑，上面描画一球面，外接于一圆柱面，按照他的愿望，用符号表示他所中意的关于圆锥、圆柱和球之体积的定理. 西塞洛（公元前106—前43年）来到西西里，他能从长满树丛、荆棘的地方找出那块纪念碑的位置.

显然，阿基米德认为自己在工程上的贡献并不重要，不值得长久纪念. 普洛塔克记述如下：

> 他认为并不值得把这样课题的任何著作留给后人；他把建造器械看作不高洁、不光彩的活计，因为通常每项技术

而指向实用和赢利，他追求那些美好和优秀的东西，将其置于超乎一切与通常的生活必需品有联系的事物之上.

如果想想一切由用于众多战事的科技发明所带来的恐怖，阿基米德的看法似乎是相当合理的. 著名的英国数学家哈代（G.H.Hardy）于1940年写道：

> 有一种真正数学家的真正的数学；我把它称作"无关紧要的"数学，此乃就改善世界之需要而言. 这种真正的数学可以无论据证明它为正当的……，但对于真正的数学并无这样的辩解；倘若它能被证明是完全正当的，则数必定被证明无非是技术罢了. 按数学家共同所持的这种观点，没有什么不值或异常. ……有一个值得欣慰的结论，它使得真正的数学家从容自如. 真正的数学对于战争无效. 还没有人发现数论或相对论被用于类似于战争的目的；但看来很不一样，许多年来任何人都常常如此为之. 确实有一些应用数学分支，诸如弹道学和空气动力学，它们是为了战事而有意识地发展起来的，并要求了十分精心制作的技艺；或许很难再称这些应用数学分支为"无关紧要的"，但也无可要求哪一个分支归入"真正的"数学之行列. 它们的确是令人讨厌的简陋和无法忍受的模糊. ……那么，真正的数学家可以问心无愧，也不难反对其工作可能有任何价值；如我在牛津大学所言：数学研究是一项无罪的清白职业. 然而另一方面，"无关紧要的"数学在战争中有很多应用. ……这些应用的一般效果十分清楚：数学使现代的、科学的、"总体的"战争得到便利（纵然不像物理学和化学那么显著）.

嗨！没有一个清白、无罪的数学家！甚至数论——哈代最喜爱的理论，如今也成了秘密公职部门所掌握的密码术的一个工具；这里且不去提及狭义相对论中的公式 $E = mc^2$.



莱昂纳特·欧拉（1707—1783年）. 由埃马努埃尔·汉德曼（Emanuel Handmann）绘制（1753年，巴塞尔）.

3 最短联线和最速联线



温塞言道："无可置疑，倘若您以为这种鉴定会使生活变得完美，就像是为您酣唱的悦耳歌曲，那您就错了. ……因为我们已经耗费大量时间和思考精力，却是出于如此假设——这是一件谋杀案；并认为此假设适当乃是简捷而了然的.

［洛特·彼得·温塞语，转引自多萝西·L·塞耶斯（Dorotohy L. Sayers）的著作］

我们或许在这时候或那时候都已考虑过变分法问题. 倘若打算开汽车去旅行，便会盘算：哪一条路径最短，或者到达目的地最快. 这两个问题未必等同. 选一条绕道的公路可能比选一条较短的穿过山区的崎岖小路快一些.



杰拉杜斯·默卡托（1512—1594年），被称作“于利希（Jülich）公爵的宇宙志”，于1552年开始在杜伊斯堡大学工作。他制作的地球仪和地图散布到全欧洲，并因此而闻名起来。他采用新的、所谓默卡托投影方法而制成著名的世界地图于1569年问世；这主要试用于海上航行，并一直用到如今。

罗马人对这类问题颇感兴趣，他们铺设了一个良好的通道系统把意大利跟帝国的其他地区联结起来。因道路畅通，罗马军队得以迅速转移，去镇压各地叛乱；但叛乱者也因此而能很快流窜至罗马。

对15世纪和16世纪的欧洲当权者来说，最短联线问题和最速联线问题变得特别重要，他们意欲寻找通往远东和新大陆的最佳路线。更快的航线就保证了赢利更多。闻名世界的瓦斯卡·达·伽马（Vasco da Gama）、克里斯托弗·哥伦布（Christopher Columbus）的远航队必定主要着眼于经济交易。

在那个时期，没有人再怀疑地面呈球形；这已成为一种常识。远古时代的希腊人把地面想像成平坦的圆盘，被大海包围着，上面并罩着圆拱形的天空。然而，毕达哥拉斯认为地面呈球形；亚里士多德和阿基米德试图证明这个想法。埃拉托斯尼（Eratosthenes，约公元前275—195年）——亚历山大里亚图书馆的主管甚至算出，我们这个星球之周长的相当精确的数值约为37 000千米。地面呈球形，对于古希腊受过教育的人来说肯定是一种常识；可是在其后的罗马时代，竟很少有人记起这一地理学上的知识。大部分基督教神父从圣经得知，地面必定是一个平坦圆盘；相应地，又被描绘成中心在耶路撒冷的轮子。可是，希腊地理学没被人们完全忘却，以致在文艺复兴时期，希腊人的著作被重新展现，于是科学复苏了。1492年，哥伦布发现了美洲大陆，马丁·贝海姆（Martin Behaim）造了自古以来第一个地球仪。随着铁路和航线增多，制备一幅准确的地图成为一项科学任务。杰拉杜斯·默卡托（Gerardus Mercator）是一位首先根据数学原理描画地图的绘制者。（唯有后来的高斯才理解了地图制作的数学原理，下文将讨论他的一些成就。）

有关诸如地面这样一些表面上的最短联线的数学理论是由

约各布·伯努利和约翰·伯努利兄弟于1697年建立的. 在介绍这个理论之前，我们先来考虑一些可以只用初等几何推理即能给出其答案的简单问题.



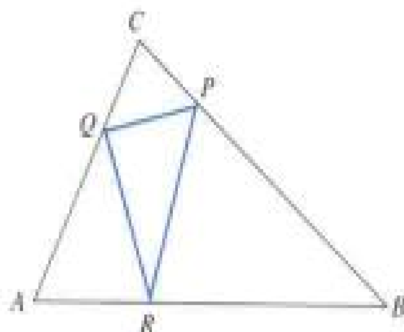
赫尔曼·阿曼杜斯·施瓦茨（1843—1921年）.

内接于锐角三角形的、周长最小的三角形

我们将说明的第一个问题是由赫尔曼·阿曼杜斯·施瓦茨（Hermann Amandus Schwarz）提出并解决的. 他乃先任职于哥廷根大学、后任职于柏林大学的一位教授，而且是19世纪在变分法方面最杰出的研究者之一. 他常常乐于撰述一些基本课题，下述问题见诸于他的一篇论文：

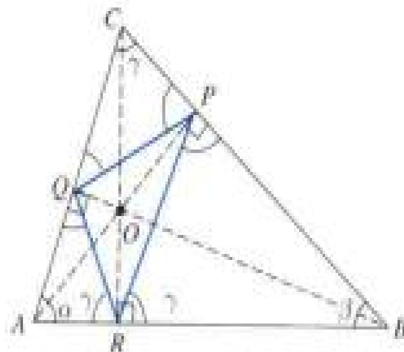
> 设有一个锐角三角形，即其三内角均小于90°，求它的一个内接三角形，使其周长可能为最小.

所谓一给定三角形ABC的内接三角形，乃指其三个顶点P, Q, R分别在三角形ABC的三条边上[1].



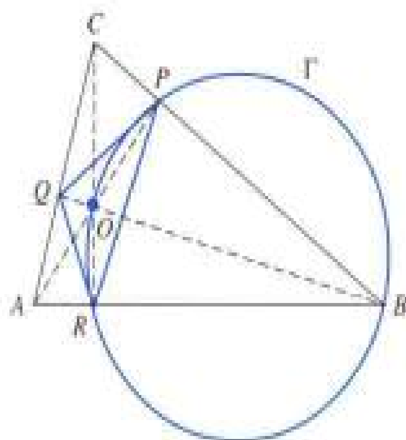
内接三角形.

这个极小值问题的答案不甚明显. 施瓦茨发现，周长最小的内接三角形由顶垂线三角形给出. 顶垂线三角形的顶点P, Q, R是这样得出的，从每个顶点A, B, C出发作各自的对边的垂线，其垂足便是. 我们来看看，为什么这个三角形的确就是施瓦茨问题的解. 根据赫伦原理，其解必定是一个"光线三角形". 此意如何？如果把三角形想像成以平面镜为墙壁的三角形房间，这样的内接三角形就代表光线在房间里行进的一条闭合路径. 所以，在此内接三角形的每个顶点处，邻角均相等（见右下图所示）. 按照初等几何学的推理，即可证明：这顶垂线三角形就是一个光线三角线，而且没有其他的光线三角形了.

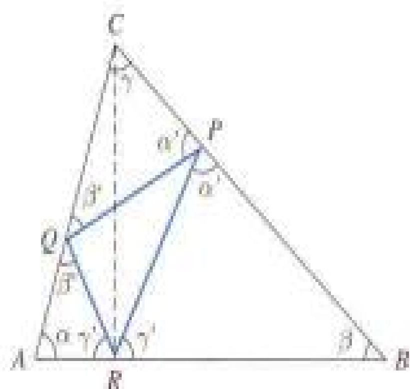


三角形ABC的顶垂线三角形.

[1] 也可能要找周长最大的内接三角形；但答案甚为明显，原三角形ABC本身即是.



为了弄明白三角形ABC的顶垂线三角形PQR是一个光线三角形，我们证明：C处的$\measuredangle ACB=\gamma$与$R$处的两个角$\measuredangle ARQ$和$\measuredangle BRP$都相等，因此$\measuredangle ARQ=\measuredangle BRP$. 由初等几何学得知，三角形的顶垂线交于三角形内部的一个公共点O（见左上图所示）. 因$\measuredangle OPB$和$\measuredangle ORB$二者都是直角，故用泰勒斯定理推断，四边形$OPBR$的顶点均在圆周Γ上，且OB作为通过其中心的弦. 而$\measuredangle PBO=\measuredangle PRO$，此乃这两个角对着$\Gamma$上的同一段弧之故. 再则，因为三角形$BCQ$是直角三角形，所以$\measuredangle PBO=90°-\measuredangle ACB$；同理，$\measuredangle PRO=90°-\measuredangle PRB$. 由这三个关系式便得出$\measuredangle ACB=\measuredangle PRB$. 同样还可得$\measuredangle ACB=\measuredangle ARQ$，那么$\measuredangle ARQ=\measuredangle BRP$. 与此类似，可证$P$、$Q$处的两个对应的角分别相等. 因此，这顶垂线三角形确实是一个光线三角形，与我们所判断的一致. 接下去要证明，除了这顶垂线三角形外没有其他的光线三角形. 于是且设在给定三角形ACB内有一个任意的光线三角形$\Delta=PRQ$. 要证明的是R处的反射角γ'等于$\gamma=\measuredangle ACB$. 假定$\gamma'=\gamma+\delta$，因$\alpha+\beta+\gamma=180°$，$\alpha+\beta'+\gamma'=180°$（见图），则便有$\beta'=\beta-\delta$，同样也可推断$\alpha'=\alpha-\delta$. 观察一下三角形$QPC$和$ABC$，便得出$180°=\alpha'+\beta'+\gamma=\alpha+\beta+\gamma-2\delta$和$180°=\alpha+\beta+\gamma$，则就表明$\delta=0°$，亦即$\gamma=\gamma'$. 同样可证得$\alpha=\alpha'$和$\beta=\beta'$. 于是得出结论：三角形$\Delta$相似于顶垂线三角形，因二者有相同的三个角，即为$180°-2\alpha$，$180°-2\beta$，$180°-2\gamma$，而且二者的对应边彼此平行，那就不难证明$\Delta$与顶垂线三角形相一致.



总结上述讨论，我们可以说，顶垂线三角形是ABC内接的唯一的光线三角形.

由上面的推理陈述可以认为，我们已经描绘了施瓦茨定理的完全证明过程；但是并未做到. 已经证明的只是，如果施瓦茨问题有一个解，则它必定是顶垂线三角形；但并非意指，有解是

显而易见的. 这看起来颇像毛发的劈裂；事实上，十分需要小心求证. 为了确信此必要性，让我们把自己置于洛特·彼得·温塞（Lord Peter Wimsey）的地位上. 假设温塞发现了一具尸体，并涉及十七个谋杀嫌疑分子；而且他完全肯定：凶手不可能多于一人. 他收集一切证据，并查验那些嫌疑分子不在作案现场的辩词，于是他逐一减少嫌疑分子的个数，最后只剩下一个：是管家. 那么这管家就是凶手！且慢，彼得很细心，他再一次查验证据，设法确定无疑地证明，死者是自杀，那么就没有凶手. 你要明白一点：在你的刑事案件里找到一个显然而唯一被确定的嫌疑分子是不够的，你还须证明这的确是一桩谋杀案.

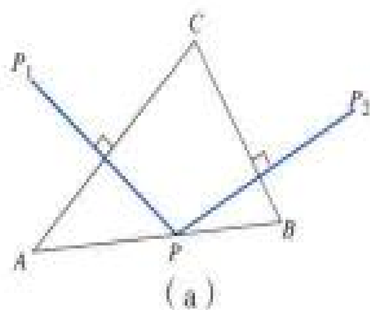


卡尔·外尔斯特拉斯（1815—1897年）.

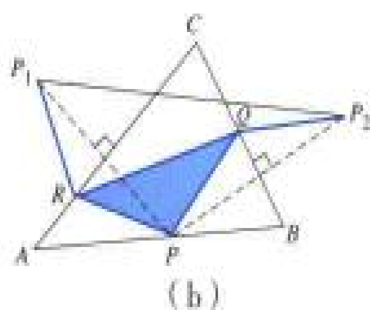
同样的道理也适用于数学问题. 顶垂线三角形是施瓦茨问题之解的唯一候选者，但我们还必须证明解是存在的. 如果你偏执于已获得完整的证明这样的想法，你就会觉得困惑. 但你有很好的伙伴，乃是一些大数学家，包括黎曼（G.F.B.Riemann）在内；他们也犯了同样的错误. 唯有卡尔·外尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）——柏林大学的教授，于1869年用一个明显的事例，使他的同时代人确信：为了求解一个极小值问题，你不仅必须画出解的所有可能的轨迹，还必须证明该问题至少具有一个解.

下面是另一个例子. 洛特·彼得·温塞的故事还没有消除你的所有疑虑. 我们知道，在所有正整数1，2，3，4，5，…中，1是最小的一个. 假定有一个最大的整数，我们要“证明”1也是一个最大的整数. 为此，取除1以外的一个任意整数n，则n小于n^2，n^2也是一个整数. 所以n不可能是最大的整数，那么唯有1还可能是所有数1，2，3，…中最大的一个. 在这样的推理方式中，错误显然在于我们假定存在一个最大的整数.

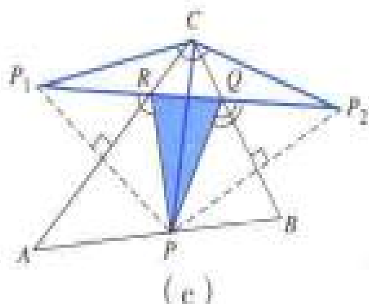
在外尔斯特拉斯提出批评以后，数学家们探得一种推理方式，即所谓变分计算的直接方法，藉此往往得以证明，对于给定



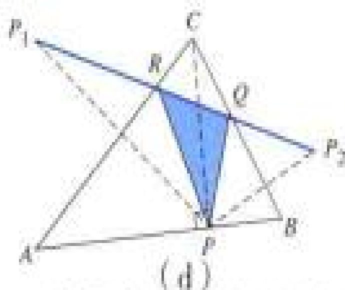
(a)



(b)



(c)



(d)

施瓦茨问题之解的存在性的初步证明.

(a) 三角形的 AB 边上任意一点经另外两条边 AC 和 BC 的映照.

(b) 一个任意的内接三角形 PQR 的周长通常大于距离 $\overline{P_1P_2}$.

(c) P 点在 AB 边上的什么位置，它的两个镜像点 P_1 和 P_2 之间的距离 $\overline{P_1P_2}$ 最小?

(d) 若 P 点是从 C 到 AB 边的垂足时，距离 $\overline{P_1P_2}$ 最小.

的极小或极大问题，其解是存在的. 至于施瓦茨问题，侥幸可用初等几何学的推理方法，相当容易地证明其解的存在性.

为此，且在 AB 边上任选一点 P（如左图所示），经 AC 边和 BC 边将 P 点映照. 令 P_1 和 P_2 为 P 点对应的镜像点. 接着，分别在 AC 边和 BC 边上另取 R 点和 Q 点；然后，考察内接三角形 PQR. 其周长等于折线 P_1RQP_2 的总长度 L，即

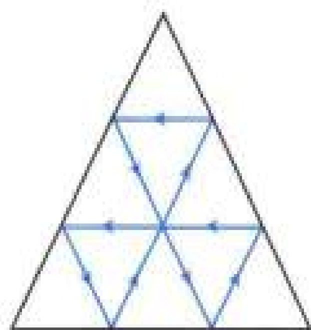
$$L=\overline{P_1R}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}=\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QP}.$$

如果固定 AB 边上的 P 点，而 R 和 Q 在通过 P_1 和 P_2 的直线上，则长度 l 是最小的，所以 L 的最小值就等于 $\overline{P_1P_2}$，即 P_1 点和 P_2 点之间的距离.

于是，施瓦茨问题便转变为这样一个问题：AB 边上是否存在 P 点的一个特殊位置，对应于此，距离 $\overline{P_1P_2}$ 为极小. 我们断言，若 P 点是从 C 点到 AB 边的垂足时这段距离最短. 首先注意到 P_1CP_2 是等腰三角形，因为 C 与 P、P_1、P_2 三点均等距，即 $\overline{P_1C}=\overline{PC}=\overline{P_2C}$. 而且，等腰三角形 P_1CP_2 在 C 点的角却原来跟 P 点在 AB 边上的位置无关（见左图 c），它的大小为三角形 ABC 在 C 点的角的两倍. 一等腰三角形，若其顶角（两等边所夹之角）有确定大小，当两等边的长度为极小、以致 $\overline{PC}$ 为极小时，其底边（这里即 $\overline{P_1P_2}$）便可能最短. 因为从一点到一条线的最短距离就是其垂直距离，因此得出，若 P 点与从 C 到 AB 的垂足相合，则 $\overline{CP}$ 为极小.

如此就证明了施瓦茨问题有解，其解即为三角形 PQR，P 点是从 C 到 AB 的垂足（见左图 d），Q 和 R 分别是 P_1P_2 线与 BC 边和 AC 边的交点. 顶垂线三角形只有一个，它可能为一个解，故而得出：顶垂线三角形是施瓦茨问题的一个解，并且是其唯一

的解；这正如我们所断言的.



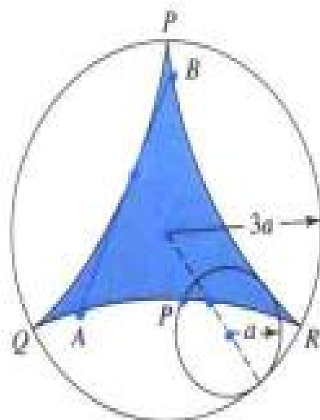
光线的闭合路径，其长度不必为极小.

我们对施瓦茨问题作出评述，乃观察除了光线三角形外，还涉及光线的其他可能闭合路径，见右图所示. 所有凭藉的光线都遵循反射定律，光线的路径相当于一弹子球在三角形球台上的闭合轨迹. 施瓦茨三角形仅指由只有三条直线段构成的光线闭合路径.

我们已经明白，必须证明给定数学问题的解实际上是存在的. 但你或许会想，每个"合理的"数学问题才必定有解. 下面是用另外的方式予以证明的例子.

1917年，日本数学家挂谷提出如下问题：

> 求出一个面积最小的平面图，其内一条长度为1的线段可以转过180°，亦即可以通过连续运动而完全转向.



内摆线和细针.

（你可以设想一根很细的针在扁平容器内旋转，并假定其转到相反方向.）

人们一般的"感觉"是，挂谷问题必定有解，一度以为面积为$\pi/8$的内摆线就是所期望的图形（见右图所示）；然而至1927年贝西克维奇（Besicovitch）发表了下述惊人结果：

> 有一些面积为任意小的图形，其内长度为1的线段可以完全转向. 那么，就不可能找到面积为极小的图形，其内细针可以转向. 所以，挂谷问题没有解——这使任何人都十分惊讶，之前人们没有弄明白这个问题.



雅可布·斯坦纳（1796—1863年）.



埃万杰利斯塔·托里拆利（1608—1647年）. 在1644年发表的主要著作《几何学著述》中，他采用了阿基米德和卡瓦列利的一些先于微积分的概念.

斯坦纳问题

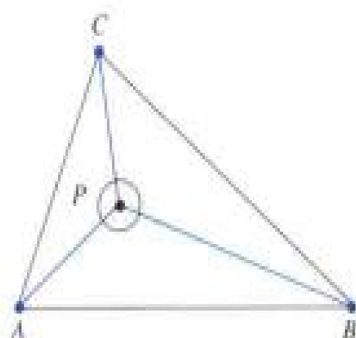
让我们考虑极小问题的另一个美妙例子，能用初等几何结合以极小原理的方法予以解决. 此乃由柏林大学教授雅可布·斯坦纳（Jakob Steiner）设想；但已由法国数学家皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat）于1646年提出. 这个问题最初可能是由伽里略的最后一个学生埃万杰利斯塔·托里拆利（Evangelista Torricelli）于1646年解决的. 博纳文图拉·卡瓦列利（Bonaventura Cavalieri）于1647年以及文森扎·维维安尼于1659年对这个问题也作了类似的研究. 后者将其关于所谓斯坦纳问题（虽然称其为费马问题或许更适当）的研究成果，作为他所重编的著名的阿波罗尼奥斯之《圆锥曲线》第五卷的一个附录而公诸于世，在这部著作中，古代作者分析了与圆锥曲线相关的极大和极小问题.[2]

斯坦纳问题是指，有三个城市 A、B 和 C，由一个道路系统联系起来；假定并无障碍物，这样就可以随意地筑路，而且城市的四周地区都是平坦的. 此问题在于寻找一个联系各城市的道路系统，其总长度可能为最小. 那么，从数学意义上对这个问题解释如下. 在一个平面上给定三点 A, B, C，要求找到一点 P，以及它与 A，B，C 的联结路径，使这些路径的总长度为极小. 路径必须是笔直的，因为两点之间的最短联线是直线. 人们称 A，B，C 的最短联线的中心点 P 为费马点.

[2] 在这之前，人们对于此有名的专题论文集只知道有四卷，以致维维安尼仅仅依据其他一些古代著作中所包含的知识予以重编. 不久以后，阿波罗尼奥斯的七卷本之阿拉伯语译文版出现于佛罗伦斯的梅迪西恩（Medicean）图书馆，而其拉丁语译文版于1661年问世. 同时代人惊奇地看到，维维安尼所编之版本是那么接近于原样. 如此看来，第八卷似乎是永远亡佚了.



读者或许想知道费马点的特征. 可能至多有一个这样的点[1]. 为此目的，且设三个不同的点A、B、C，并假定P是相应于A、B、C的费马点. 倘若A、B、C位于同一条直线，譬如说，B在A和C之间，那么很显然，P点必定与B点重合. 因此，可致力于A、B、C形成为一个真正的三角形Δ的情况. 令α，β，γ分别为在A、B、C点的角，于是表征其费马点如下文所述：



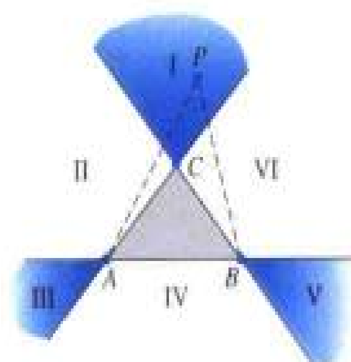
若Δ的三个角都小于120°，则P就是Δ内部唯一这样确定的点：从此点出发看，三条边向其所张的角实际上都为120°，即P点由条件$\measuredangle APC = \measuredangle CPB = \measuredangle BPA = 120°$予以确定. 可是，若$\Delta$的一个角，譬如说在$C$点的角$\gamma$至少为120°，则其费马点必定与$C$点相重合.



为了证明这个论断，且考察一个任意的费马点，对此区别两种可能性：

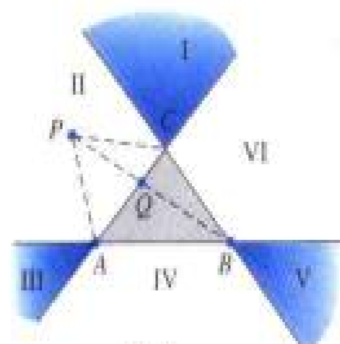
情况（i）：P点与角隅点A，B，C之一重合；
情况（ii）：P点并非A，B，C.

对于情况（i），费马点必须是最大角隅，譬如说角隅C的顶点，因为此时$\overline{AC} + \overline{BC}$小于$\overline{AB} + \overline{AC}$和$\overline{AB} + \overline{BC}$.



（a）

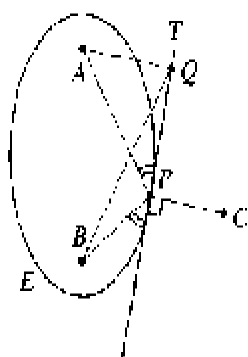
对于情况（ii），其结论为：P点必须位于Δ之内或一边上. 否则，可能在Δ的边上找到一点Q，使其和$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ}$小于$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$（见右图）；而这与费马点的极小性质会相悖.

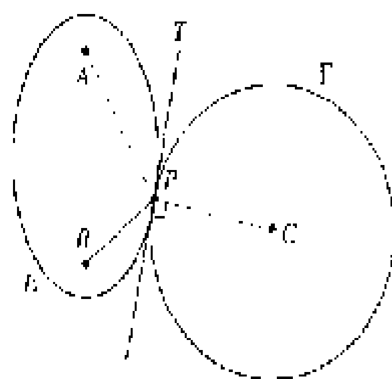


（b）

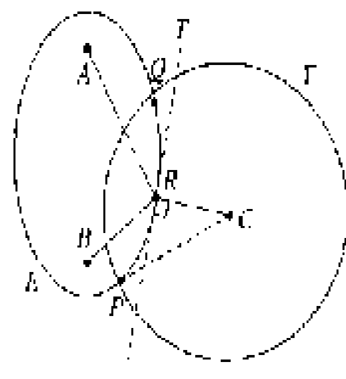
假定P不在AB边上，设圆Γ通过P点，并以C为中心，$\overline{PC}$

[1]下面的数学讨论是带一点专业性的，但只不过是初等几何的推理方式. 这是很少几个例子中的一个，由以使读者了解如何进行数学论证. 读者若对论证细节不感兴趣，可跳过这一小节，单看第97页和第100页上的最终结论.





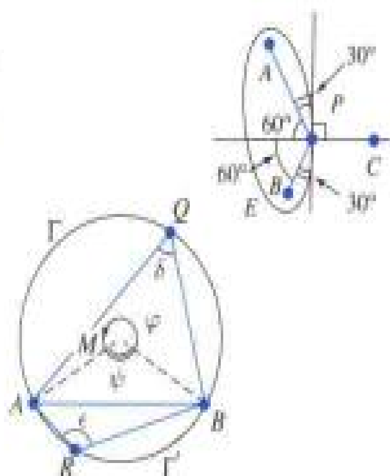
椭圆E与圆Γ相切于P，所以PC在P点垂直于E；则由反射原理得知$\angle BPC=\angle APC$.



椭圆E与Γ不可能至少交于两点，因为若交于两点，在E上便有一点R，令PC大于$\overline{RC}$，且$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AR}+\overline{BR}$.

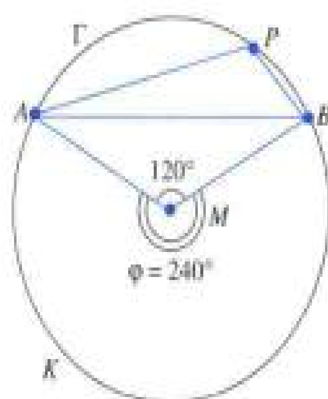
即为其半径；P还唯一地确定带有焦点A和B的椭圆E. 若A和B在Γ之外，则E必定与Γ相切于P；因为要不然，便能找到E上的一点R位于Γ之内，其$\overline{AR}+\overline{BR}+\overline{CR}$小于$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$，则与$P$点的极小性质相抵触. 设$T$是$E$和$\Gamma$在$P$处的公切线，那么$E$完全位于$T$的同一侧，即$A$和$B$所在的那一侧. 并且，对于$T$上的所有点$Q$，均有$\overline{AQ}+\overline{BQ}$大于$\overline{AP}+\overline{BP}$，除非$Q$与$P$是同一点. 换言之，折线$APB$使从$T$到$A$和从$T$到$B$的距离之和为极小. 由第2章所述的反射定律得知，射线AP和BP以相同的角度与T线相交. 由于射线PC在P处垂直于T线，故而$\angle APC=\angle BPC$.

我们利用这个结论，先来证明P不可能位于三角形Δ的一条边上. 诚然，如果P位于A和C之间的AC边上，它就不可能在AB边上. 于是应用上面的结果便得出$\angle APC=\angle BPC$. 因为$\angle APC=180°$，则有$\angle BPC=180°$；然而这是不对的，由于B不在通过A和C的直线上，$\angle BPC$小于$180°$. 同样可证明P不在Δ的另外两条边上. 因此说，费马点P位于三角形Δ的内部.

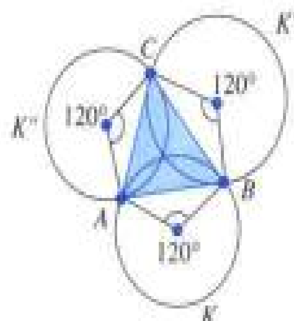


既然已经看到 ∡ APC = ∡ BPC，同样可得出 ∡ BPC = ∡ APB；就是说，P处的三个角相等，因三者相加为360°，每个角则为120°．这便是任意的费马点的卡瓦列利特征．进而，再画椭圆 E 的图，便还可看出，通过 P、C 的直线平分角 ∡ APB = 120°，亦即该线把这个角二等分为两个60°的角．

为了得到情况（ii）中的费马点的托里拆利特征，我们回忆一下泰勒斯定理的如下推广：设其中心为 M 的圆 K 上有两点 A 和 B，将 K 分成两段子弧 Γ 和 Γ′，二者对应之圆心角设作 φ 和 ψ，则 φ + ψ = 360°．然后，设 Q 点和 R 点分别位于 Γ 和 Γ′，并令 δ = ∡ AQB，ϵ = ∡ ARB．那么，ψ = 2δ，φ = 2ϵ；所以，δ + ϵ = 180°．这表明，Γ 是一条 ψ/2 弧；就是说，凡带有 AB 边及其在 Γ 上的相应角隅 Q 的三角形 AQB 在 Q 点的角均为 δ，它是圆心角 ψ 的一半．同样，Γ′ 是一条 φ/2 弧．（读者若注意到三角形 AMQ、BMQ、AMR、BMR 都是等腰三角形，而任意等腰三角形之三个角中的两个都是相等的，便可证明这条定理．）



再将此结论用于三角形 Δ = ABC 的一边 AB 以及 Δ 的费马点 P．设 K 是通过点 A、B 和 P 的圆，其中心在某一点 M 处．鉴于卡瓦列利特征，便知 P 点位于 AB 弦上面的120°弧 Γ 上．



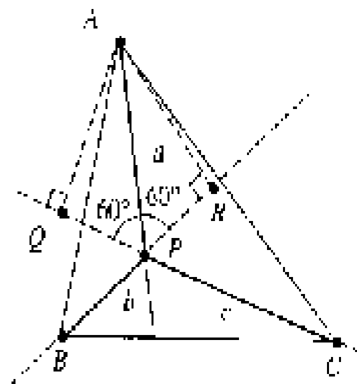
三角形 ABC 的托里拆利圆和托里拆利点 P．

可不顾及 P 点，单从 A、B 两点出发构成 K，并背着 C 的方向选定 M 点，使以 AB 为底边的三角形 ABM 是等腰的，即其 $\overline{AM} = \overline{BM}$，并使 ∡ AMB = 120°．那么，K 就是以 M 为中心，并有半径 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 的圆（因为120°的余角即为 φ = 360° − 120° = 240°，所以 K 上的弧 Γ 对着 M 点，且以 A，B 为端点；实际上，φ/2 = 120°，故而 Γ 是一段120°的弧）．我们把以这种方式构成的 K 称为三角形 Δ 的 AB 边对应的托里拆利圆．同样，可确定 Δ 的另外两条边 BC 和 AC 所对应的托里拆利圆，分别记以 K' 和

K''．用初等几何的其他推理方式还可证明，三角形的这三个托里拆利圆总是有共同的交点P_0，即所谓托里拆利点．P_0点由Δ唯一地确定．这里还算明显地看出：若Δ的三内角都小于120°，则P_0点在Δ之内；若Δ有一个角大于120°，则P_0在Δ之外．但如果一个角（譬如γ）恰为120°，那么P_0点就与对应之顶点C相重合．最终，倘若P_0点在Δ的内部，则按照前面的推理，它是Δ内满足等式$\angle AP_0C=\angle AP_0B=\angle BP_0C=120°$的唯一的点．

总之，我们看到：对于其内角均小于120°的任意三角形$\Delta=ABC$，在其内至多有一个费马点；而且，只要它存在，就必与位于Δ之内的唯一确定的托里拆利点相重合．再则，如果我们预先并不知道Δ的三内角均小于120°，但知道在Δ的内部有一个费马点P，那么Δ的三内角就都比120°小，而且$P=P_0$，即P点就是托里拆利点．

可是，这并不全然意味着有费马点存在，亦即此极小问题有解，所以我们还不能说，三角形（其内角均小于120°）的托里拆利点便是费马点．我们对其所了解的一切，就是在Δ的内部的费马点不可能超过一个；因为P点必定与Δ的唯一的托里拆利点相重合；也已看到，在Δ的外部或边上（角隅点A，B，C除外），不可能有某一点是费马点．依然可能：在Δ之内或许有一个费马点P（则它便是托里拆利点P_0），还在Δ的边界上至少有另外一个费马点，那么它就是角隅点之一，譬如顶点A．但如下面立即所述，情况并非如此．事实上，如果在Δ内部存在一个费马点P，它必须是Δ的托里拆利点P_0，而且Δ的三内角必须都小于120°．令$a=\overline{AP}$，$b=\overline{BP}$，$c=\overline{CP}$．为了表明A不可能是第二个费马点，我们证明$a+b+c$小于$\overline{AB}+\overline{AC}$．为此先分别通过$BP$和$CP$画出两条直线，然后从$A$出发画出二者的垂线，垂足分别为$R$和$Q$．因为通过$BP$和$CP$的直线平分120°的$\angle APC$和$\angle APB$，故有$\angle APR=\angle APQ=60°$．因此，$\overline{PR}=$

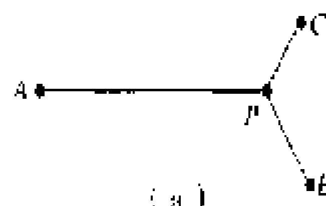


$PQ = a\cos 60°$；而 $\cos 60° = 1/2$，于是有 $PR = PQ = a/2$，则 $BR = b + a/2$，$QC = c + a/2$. 进而，毕达哥拉斯定理暗示：AB 大于 BR，AC 大于 QC. 所以就得出 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 大于 $(b + a/2) + (c + a/2) = a + b + c$，与前面的断言一致. 因此，倘若在 Δ 的内部有一个费马点，角隅点 A 就不可能也是费马点.

我们已得出如下结论：假定存在一个费马点，则只有两种可能性：

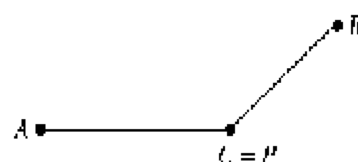
(1) 所有费马点都在 Δ 的内部，此时实际上只有一个费马点，即为 Δ 的托里拆利点；并且，Δ 的三内角均小于 120°.

(2) 所有费马点都是 Δ 的角隅点.



(a)

在第 (2) 种情况下，原则上可能有一个、两个或三个费马点；但能证明，事实上只有一个这样的点. 其论证陈述为：对于 (2)，Δ 的一个角必定至少为 120°，相应之顶点由此而便是 Δ 的唯一的费马点.

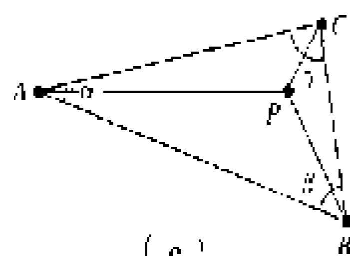


(b)

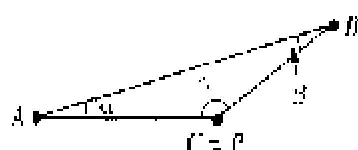
所以我们就得到如下满意的结论：

(i) 每个三角形 Δ = ABC 至多有一个费马点.

(ii) 如果 Δ 有一个费马点 P，又若 Δ 的三内角都小于 120°，则 P 必为 Δ 的托里拆利点 P_0；否则 P 就必为最大角的顶点.



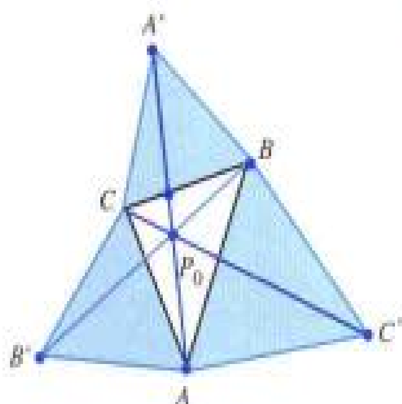
(c)



(d)

联结三点的最短路线. (a) 三角形 Δ = ABC 的三内角均小于 120°；(b) C 角至少为 120°.

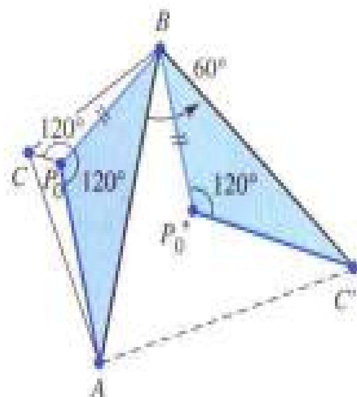
至此，还不了解在给定的三角形内部是否总是存在一个费马点. 其实，借助于近代数学，证得这样一个点的存在性相当容易；但遗憾的是，本书不可能给出一个抽象的存在性证明. 后面我们将以直接方式对其存在性作出一种推理（就三角形的三内



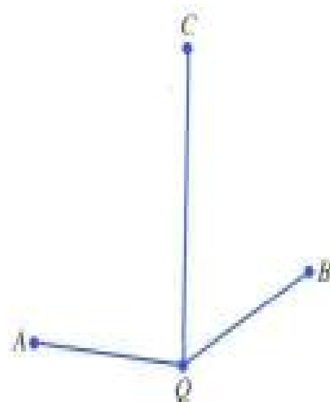
角均小于 120° 的情况而言）．如果认为存在费马点是理所当然的，最终便可陈述斯坦纳问题的一个明确结论如下：

> 对于每个三角形 $\Delta = ABC$，确实总存在一个费马点 P，它与 A，B，C 的距离之和使平面上所有点 Q 的和值 $\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$ 为极小；并且，P 或者是 Δ 的托里拆利点 P_0，或者是 Δ 的最大角之顶点，这要视 Δ 的三内角是否均小于 120° 而定．

附带说明一下画出三角形 $\Delta = ABC$ 的托里拆利点 P_0 的细致方式，此乃由维维安尼发现（1659 年），并由托马斯·辛普森（Thomas Simpson）再度发现（1750 年）．仅考虑 Δ 的三内角均小于 120° 的情况，那么 P_0 点位于 Δ 的内部．先在 BC，AB，AC 之上作等边三角形 $A'BC$，$C'AB$，CAB'，三者均在 Δ 的外部．于是，根据维维安尼的结论，托里拆利点 P_0（在这里的情况下，它与费马点 P 相重合）就是三直线 AA'，BB'，CC' 的公共交点．为了证明这一点，譬如说只要确定 P_0 点在 CC' 线上即可，那么同样可证明 P_0 点也在 AA' 线和 BB' 线上．我们用比克纳（Bückner）所采取的一种令人惊奇的"运动学"推理方式加以证明[4]．设 Δ 之内有一阴影三角形 ABP_0，令其绕其转折点 B 旋转 60° 到 Δ 的外部，于是 P_0 点就移至 P_0^*，A 点移至 C'，角 $\measuredangle BP_0^*C'$ 保持为 120°．且考察三角形 $BP_0P_0^*$，我们看到 $\measuredangle P_0BP_0^* = 60°$（转角），并为等腰三角形；因此 $BP_0P_0^*$ 的三内角均为 60°，它为等边三角形．那么便得出，折线 $CP_0P_0^*C'$ 实际是一条直线．再则，三角形 BAC' 也是等腰的，因 $\overline{AB}=\overline{C'B}$ 之故．又因为 $\measuredangle ABC' = 60°$，$BAC'$ 其实亦是等边三角形．所以 C' 确为上述用维维安尼方法画出的点，从而验证了由其而得出托里拆利点 P_0．



比克纳的证明．



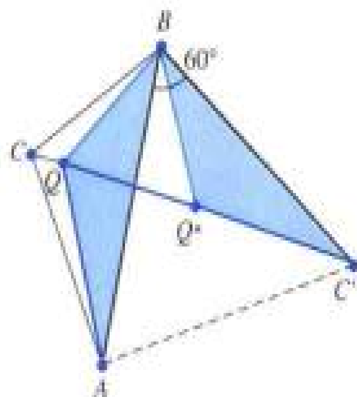
[4] 此证明在拉德马赫－特普利茨（Rademacher－Toeplitz）：《数字和图形》第二版（1933 年）里提及过，或许在 1930 年之前已发现．相关的推理由霍夫曼（T. E. Hofmann）于 1929 年给出．

构成P_0点时附带得出$\overline{AP_0}+\overline{BP_0}+\overline{CP_0}$等于$\overline{CC'}$，因为已经知道$P_0BP_0'$是等边三角形，$\overline{P_0P_0'}=\overline{BP_0}$. 此结果也适用于$\overline{AA'}$和$\overline{BB'}$，又计及费马点$P$与托里拆利点$P_0$相重合，则便得到如下由海因（F. Heinen）给出的定理（1834年）：

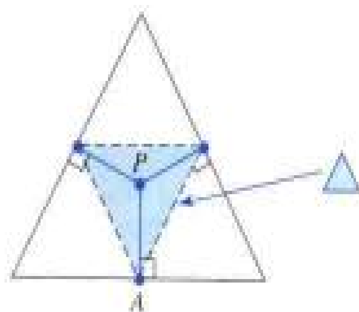
$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}=\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}.$$

于是无需计算，单单作一几何图形，便找到在平面内一切点Q中确定使距离之和$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$取最小值的那一点的简易方式.

但还没有关于存在费马点的确凿证据. 然而这里十分显然的是，比克纳的推理方式正可用于获得对于三内角均小于120°的任意三角形，其费马点P的存在性之证明，并同时证明此费马点（Δ之内）是唯一的. 回顾前述的冗长讨论，甚至更觉惊奇而印象深刻的是：得到了一个惊人的新概念；尽管上文所讨论的问题首次被考虑之后三百年左右，才有人想到这个概念.

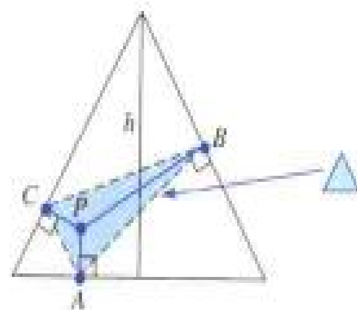


在$\Delta=ABC$的内部任选一点Q，且考察三角形AQB. 将AQB绕转折点B旋转60° 至Δ的外部，而Q则移至Q'，A移至C'. 我们再次说明三角形QBQ'和ABC'是等边的. C'点与前述相同，故与Q点的选取无关. 再则，右图表示：$\overline{CQ}+\overline{QQ'}+\overline{Q'C'}=\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$. 显然，$\overline{CQ}+\overline{QQ'}+\overline{Q'C}$大于或等于$\overline{CC'}$，仅当折线$CQQ'C'$与直线$CC'$重合时，二者才相等；唯若$\measuredangle BQ'C'=120°$，$\measuredangle CQB=120°$，亦即若$Q$是$\Delta$的托里拆利点$P_0$，才是这种情况. 所以，对于$\Delta$内部之所有的$Q$点，均有$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}\geq\overline{AP_0}+\overline{BP_0}+\overline{CP_0}$；当且仅当$Q=P_0$时等式才成立. 仔细看看便知，甚至对于$\Delta$之边界上的所有点，不等式也严格成立. 并且，上文已表明，对于Δ之外部的任意点Q，总在Δ之边界上存在一点Q'，使得$\overline{AQ'}+\overline{BQ'}+\overline{CQ'}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$. 因此，采取比克纳的推理方



式，我们已经论证了如下结论：任意三内角均小于120° 的三角形Δ确实都有一个费马点P，而且该点即为Δ的托里拆利点P_0.

用上述推理方式全然可证：任意三角形Δ都确有一个费马点；我们把证明留给读者完成.



法斯本德的结论.

法斯本德（E. Fasbender）于1846年发现，$\Delta = ABC$的费马点P也可用极大原理表征，这是就P位于Δ的内部而言. 法斯本德的结论不加证明，唯陈述如下：

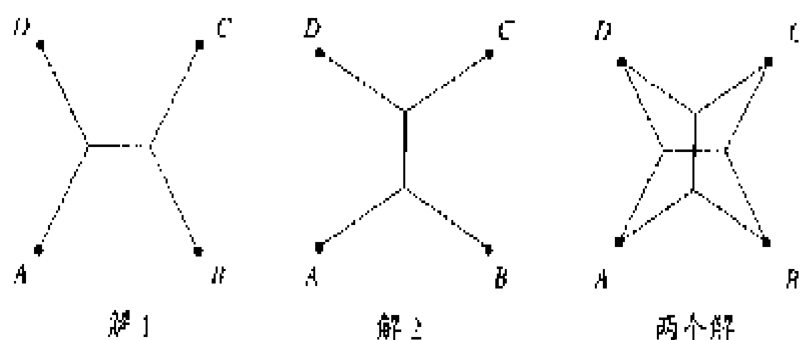
> 对于一个确定的三角形$\Delta = ABC$，距离之和$\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$的极小值等于Δ的所有外接等边三角形之顶垂线$h$的极大值. 如果$P$是费马点，认定$h$取极大值的那个等边三角形，有线段$AP$，$BP$和$CP$，分别垂直于通过$A$，$B$和$C$的各条边（见左图）.

我们深感有趣的是：三角形内部的费马点P必定被周围的联线形成一些同样的120° 角. 后面论及肥皂膜、肥皂泡和某些物质的裂缝时又会出现120° 角. 并且，读者将看到，肥皂膜可以用作"模拟计算器"，以求得斯坦纳问题及其推广了的问题（下一节讨论）的物理解.

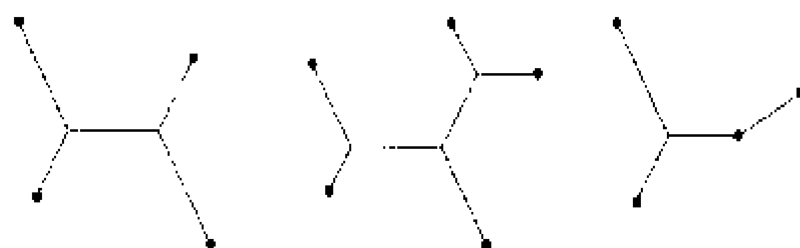


广义斯坦纳问题

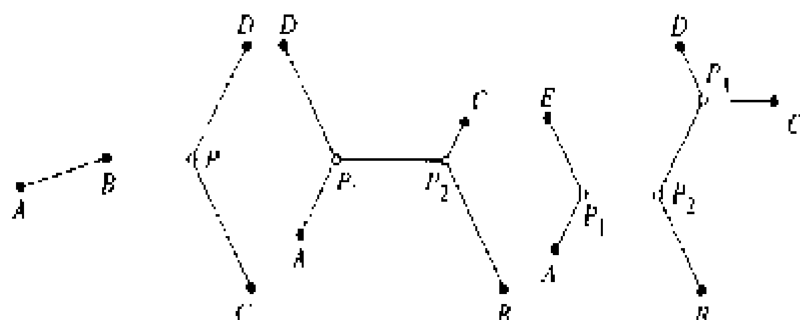
有一类比斯坦纳问题更广义的问题，颇为机巧、并有实际利益. 这类推广了的斯坦纳问题乃指：在平面上给定一些点，用一个总长度为最小的线段系统把它们联结起来. 例如可提出如下问题：用一个最短路径系统联结正方形的四个角隅点A，B，C，D；能够证明此问题确实有两个解（见下页上图），二者可通过适当的转动而彼此转换. 于是，我们必须放弃这样的想法：总



对于正方形的四角隅点的广义斯坦纳问题的两个解.



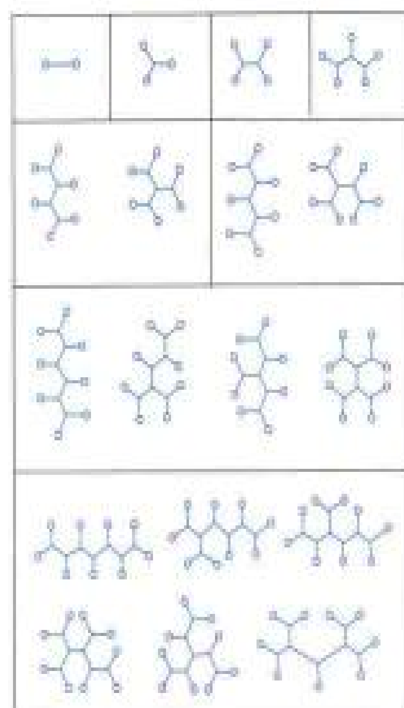
四个点和五个点的极短联线系.



四个点和五个点各自的最短联线系.

能预期确有一个解，如同关于 A，B，C 三点的斯坦纳问题的那种场合. 对于多点问题，求其最短联线系统的解，一般来说并不是唯一的，除非有侥幸的例外. 我们可以说两点或三点的最短联线系，而四点、五点、六点、……通常有几个最短联线系，因此必须谨慎地谈及在一个点集之间的某一个最短联线系.

且考察一下处在任意位置上的四个点或五个点的最短联线系（见图），看来似乎是上面提及的普通斯坦纳问题的两个可能解的结合. 比如在四个点 A，B，C，D 的场合，我们或者附加一个点 P，或者附加两个点 P_1，P_2，由以构成 A，B，C，D 的最短联线系；而对于图中的 A，B，C，D，E，则另外附加三个点，以构成其极小值系统（最短联线系）. 给定一个点集，事先并不明



联结n个点A_1，A_2，…，A_n的托里拆利树，其附加点P_1，P_2，…，P_k的最大个数为$k=n-2$（$n=2, 3, \cdots, 9$）.

白须附加多少个点P_1，P_2，…以构成联结这些给定点的路径的极小值系统. 但可以证明，足以构成联结n个给定点的极小值系统而附加的点的个数不大于$n-2$. 再则，在若干给定点的极短联结系统中，在每个附加的点P_1、P_2，…处，因其极小性状，都有三条线相交，两两交成120°角. 换言之，最短联线系中的附加点的行为如同普通斯坦纳问题中的托里拆利点一般.

在平面上给定n个点A_1，A_2，…，A_n，联结A_1，A_2，…，A_n的直线路径系统S倘若具有下述性质，则就称为架住这些点的托里拆利系：

（i）存在不同于A_1，A_2，…，A_n的k个附加点P_1，P_2，…，P_k，乃指S的节点，从而使每条路径的端点或者为节点，或者就是A_1，A_2，…，A_n中的某一点.

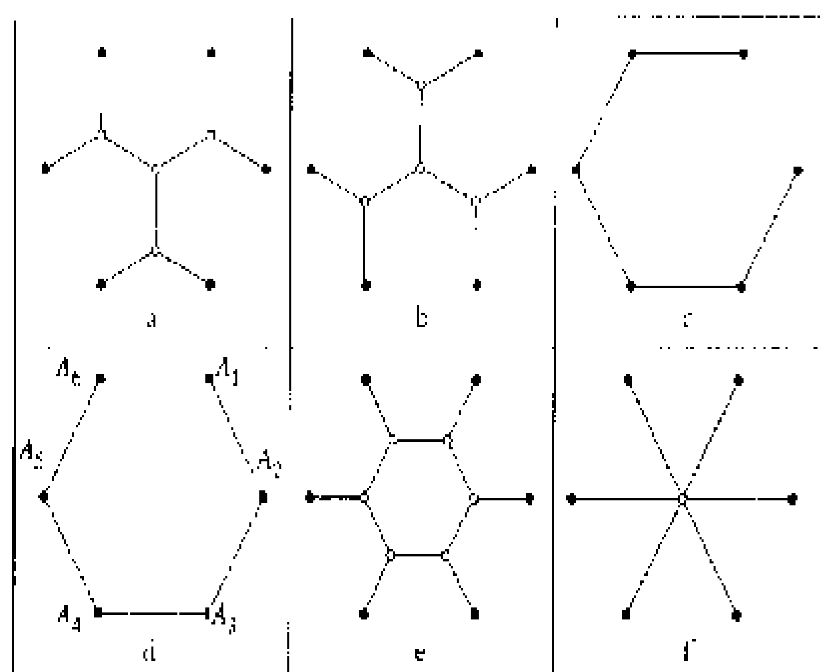
（ii）每个节点都是S的一个托里拆利点，就是说，在P_j处，其实总有相互交成120°角的三条路径交于此.

（iii）在点A_1，A_2，…，A_n处，或有一条、或有两条、或有三条S的路径交于此. 再则，若有三条路径在A_j相交，A_j必定是S的一个托里拆利点，若在A_j处实际有两条路径l和l'交于此，那么l和l'在A_j处的交角大于或等于120°.

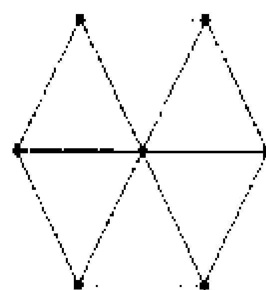


第105页的图表示架住同样的31个点A_1，A_2，…，A_{31}的四个不同的托里拆利系（点A_1，A_2，…，A_{31}全画成实心点，而附加的节点Q_1，Q_2，…用小圆圈标明），它们分别有12个、13个、14个和15个节点.

上面的讨论（并稍显直观的论证）说明点A_1，A_2，…，A_n的每个最短联线系统都是一种架住A_1，A_2，…，A_n的托里拆利系；但不是每个托里拆利系都必定是最短联线系统，看看如下六个图即可明瞭.



这里选定 A_1, A_2, $\cdots$, A_6 为一个边长为1的正六边形的六个角隅点(可以通过作六个全等的等边三角形而确定这六个点,此乃其明确标定的一种方式). 图a—e所示的都是托里拆利系,而图f所示的不是托里拆利系,因为有六条线段交于中心节点处. 托里拆利系c的总长度为5,而两个全等系a和b的总长度为$3\sqrt{3}$,其值大于5.15,所以c系的总长度小于a系和b系的总长度. 再则,另有五个托里拆利系与c系全等,这六个全等的路径系统可由d系去掉一条边而得. 注意到路径系统a,b,c其实是树状的,而d和e不然[显然,凡不包含闭合环,亦即不可能在其内放入一个"圆"的系统称为"树"(树状系统)]. 还注意到托里拆利系若内含一个环,就绝不可能是最短联线系,因可以移去环上的一条边便成为总长度较短的联线系. 所以,每个最短联线系必须是托里拆利树. 而托里拆利系d和e显然不是树状的,它们不可能使其联线达到最短. 我们还看出,d和f是e的极限情况. 倘若使环收缩到中心点,e则变成f;倘若使内环扩张成大的六边形,e则变成d. 又注意到托里拆利系e这一簇的各系有相同的总长度,并与d系和f系的总长度也相同;尽管

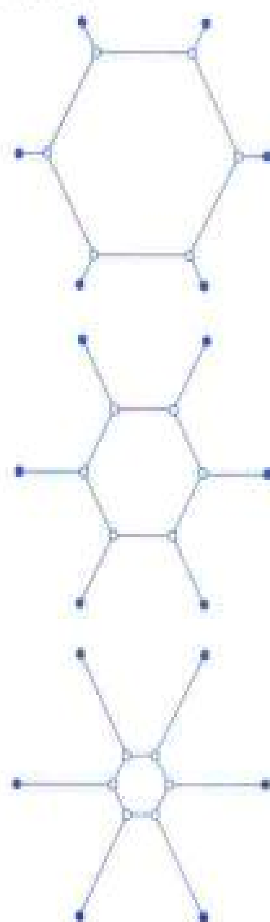




左：联结美国49个城市的树状联线系统．右：左图对应的托里拆利树[由普林姆（Prim）于1957年构成]，比左图中的树状联线系统短3.1%，该系是没有附带节点、其总长度为极小的树状联线系统．

f不是托里拆利系，但毕竟是e系的极限．

对于正六边形的六个角隅点，已发现了八种托里拆利树，就是六种c系、以及a系、b系．稍加努力即可证明没有其他托里拆利树．那么六种c系就是六个点 A_1、A_2、…、A_6 的六种可能的最短联线系．两个托里拆利树a和b从局部看来是使其总长度严格地达到极小的，尽管这样的树在总体结构上有小量变化，以致倒增大了总长度；故而我们认为这两种树状系统是完全稳定的．

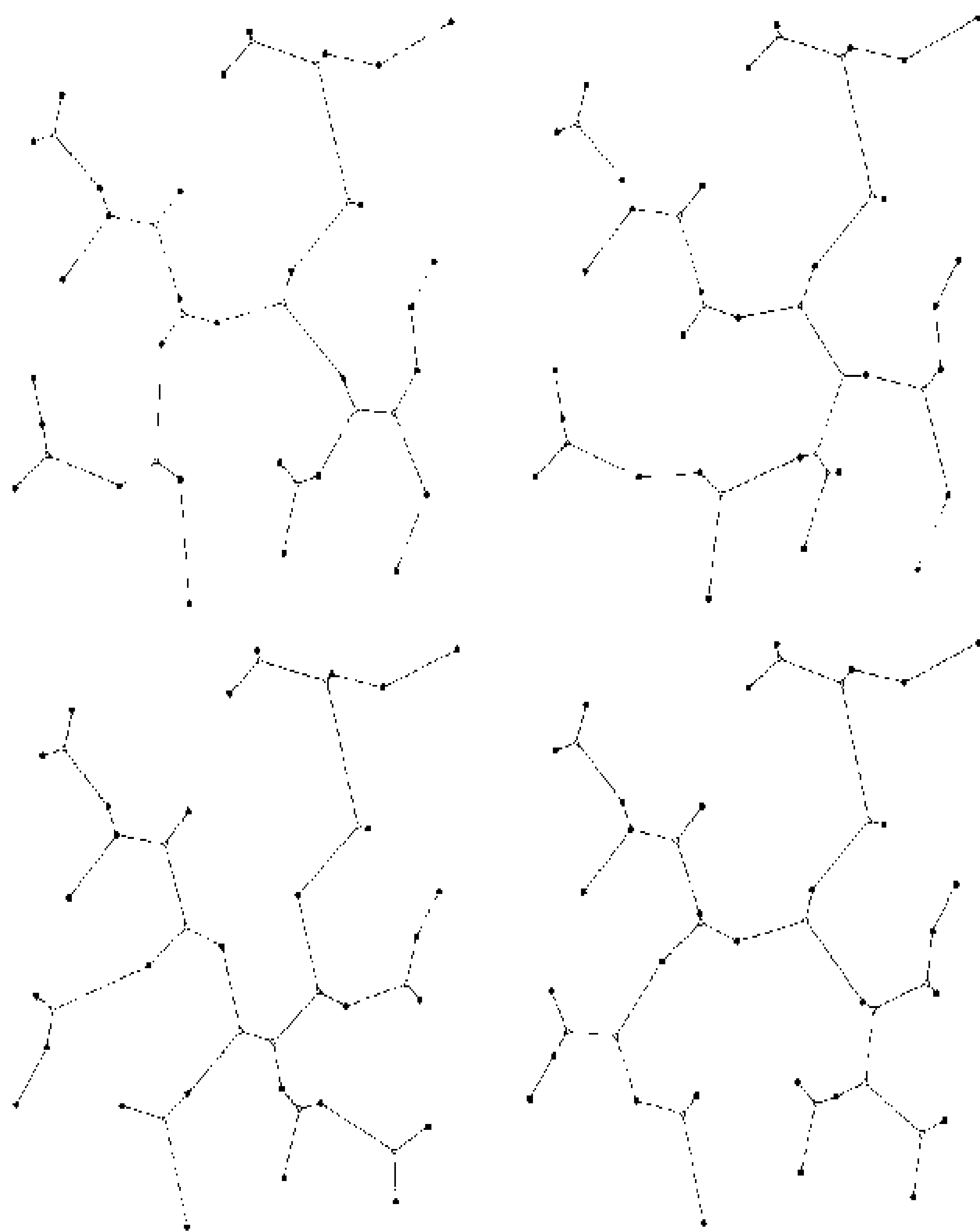


给定点 A_1、A_2、…、A_n 之间的最短联线系，即所谓是架住这些点的斯坦纳树；因为此乃广义斯坦纳问题的解，而且是树状系统[5]．我们的讨论表明，每一斯坦纳树都是托里拆利树；一般说来，反过来并不成立．因此，为了确定所有的斯坦纳树，就必须找遍全部的托里拆利树；然后必须把它们的长度相互比较，以选出最短的几个．遗憾的是，这给计算科学引来一个相当棘手的问题．事实上，加里和约翰逊[6]已经验证，广义斯坦纳问题至少像任何NP完备性问题（此乃计算机科学中名声欠佳、令人

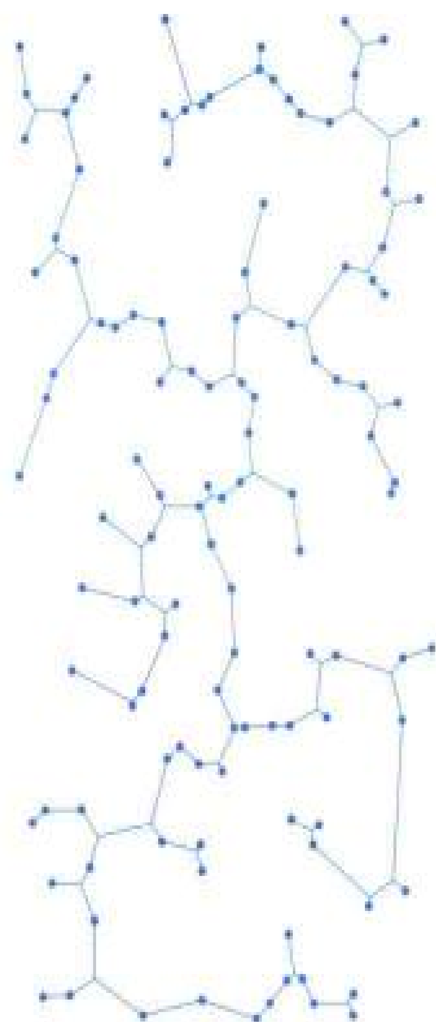
---

[5] 这里不同于目前文献中的用语；文献中，我们所谓的"斯坦纳树"通常称作"极小斯坦纳树"．再则，我们的术语："托里拆利系"和"托里拆利树"也不规范．

[6] 加里（M.R. Garey）和约翰逊（D. S. Johnson）：《计算机及其难以对付的课题——NP完备性理论入门》，弗里曼（W.H.Freeman），圣弗朗西斯科，1979年．



联结 31 个点的托里拆利树，由肥皂膜实验生成。

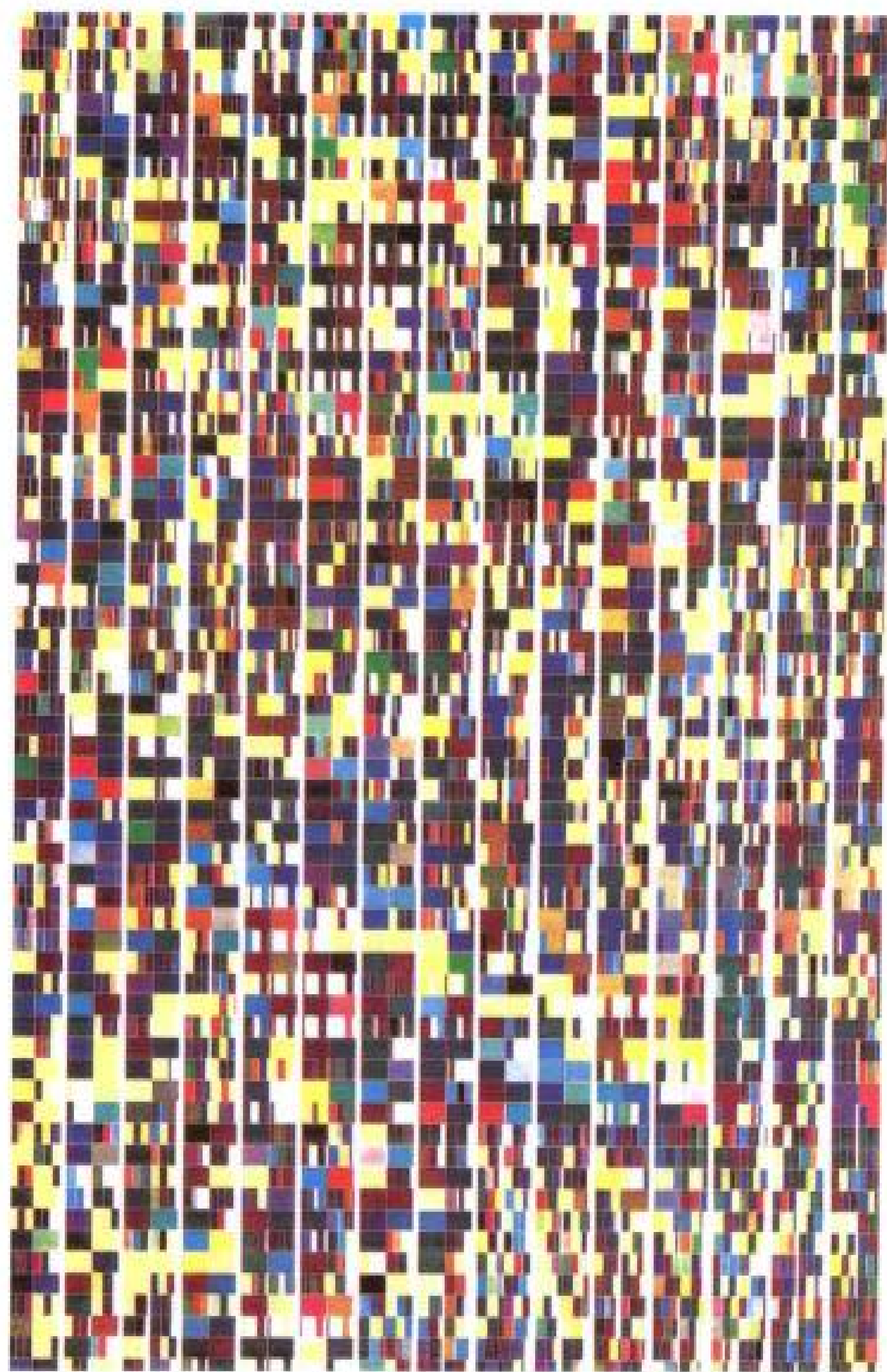

联结120个点的托里拆利树，附加了47个节点，此乃通过大量计算而确定的.

讨厌的问题）一样困难，因为对于非特殊位置的点集可能有的托里拆利树的个数会随着 n 增大而急剧地增大. 这是相当烦人的，因为大量实际问题都能看作为广义斯坦纳问题. 例如，可以设想用道路系统、电话线系统、煤气管系统或高压线系统等等，把一些城市联结起来. 显然，要使这样的系统的长度减到最小，很可能是为了使建造和日常维修的费用减到最小. 再如，一个由分布在不同地区的若干联营工厂组成的公司，会致力于把运输费用减到最小，所以就试图采用斯坦纳树的方式使工厂之间的通路达到最短，倘若可以自由地筑路的话（在目前恐怕是难以办到的）.

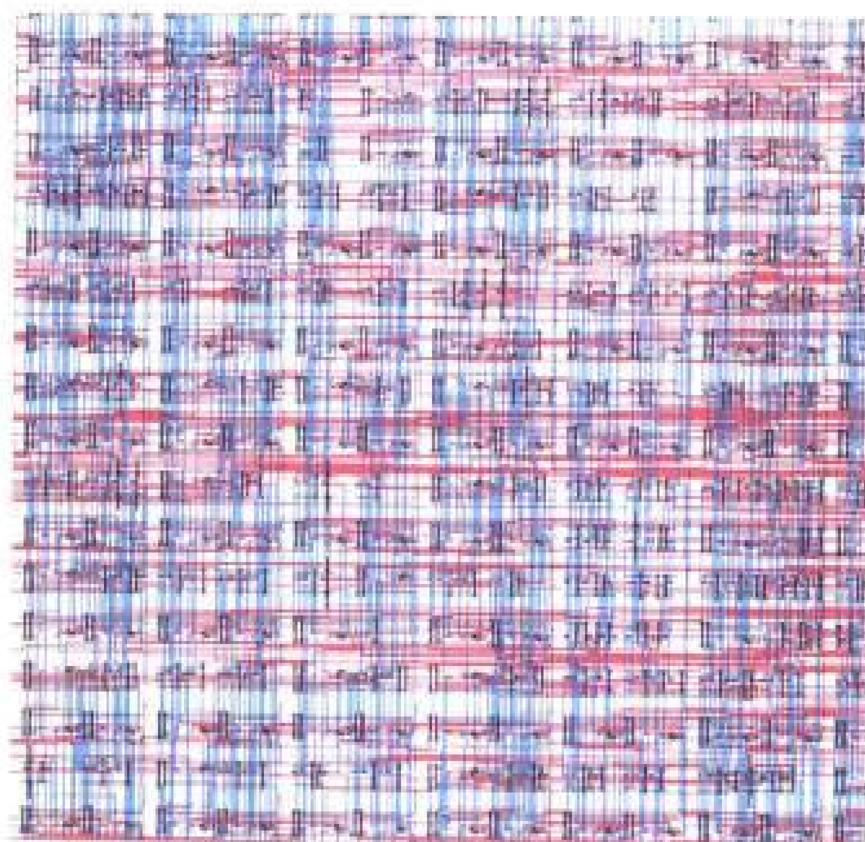
另外，在设计计算机的集成电路时，也涉及到斯坦纳问题和相关数学课题的重要应用. 例如，目前的一片逻辑芯片，一平方厘米上竟约有八百万只晶体管之多，按其功能而言，它们乃由一个极细的金属丝的精致系统联结起来. 诚然，人们意欲使金属丝系统尽可能的短，以使在芯片上填入更多的晶体管，从而增强芯片的功效. 这就要求解决与斯坦纳问题紧密相关的课题. 譬如，VSLI布局（即芯片集成电路设计）需要求解所谓的曼哈顿（Manhattan）－斯坦纳问题，此乃指试图找出 N 个给定点的最短联线，这路线系统仅由水平的和竖直的分支路线组成（见图）.

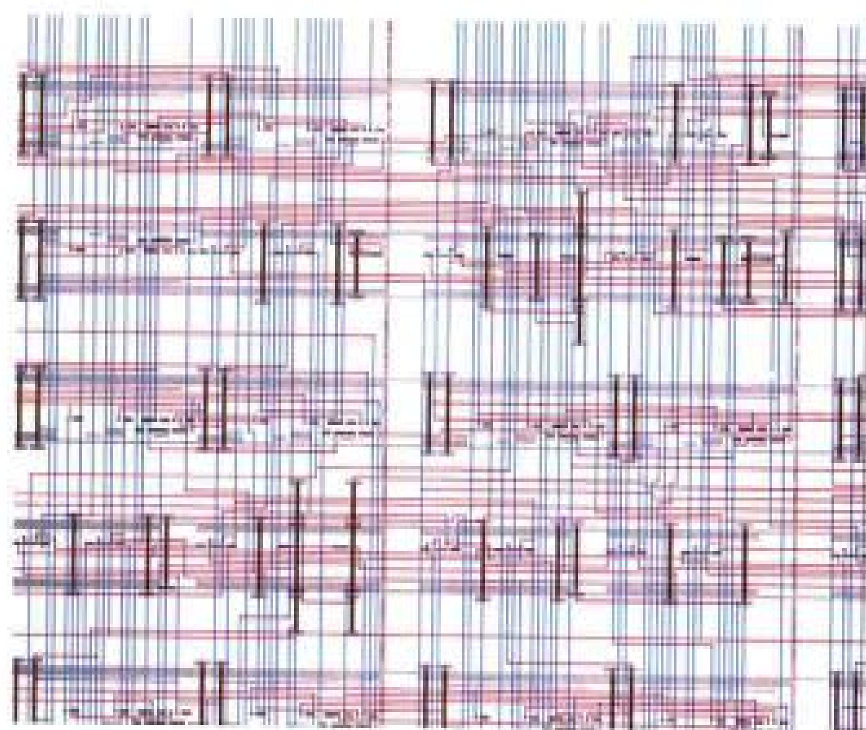
生物学家们用斯坦纳树估计物种进化的可能廓貌，然后比较各物种的相互关系，乃通过对这些物种共有的蛋白质中的氨基酸之族系的考察而比较. 或许这样的做法有点儿牵强.

最早论及广义斯坦纳问题，并考查斯坦纳树和托里拆利树的科学家可能是法国的几位数学家. 在1810—1811年的热尔刚（Gergonne）数学年刊中有几篇文献，某些作者不详，热尔刚本人或许即是作者之一. 另一篇涉及实际应用的文献由克拉佩龙



一张现代计算机芯片，其上一平方厘米内包含几百万个晶体管，以水平线和竖直线的形式相联结（见下一页上的两幅图，乃是ZORA芯片的切片）．基本线路元件作为元胞而预先制成，然后把这些元胞当作部件而构成芯片的整个线路平面，此图描绘了芯片ZORA的元胞之布局结构（以40倍比例放大），清晰地显示了设计情况．





计算机芯片ZORA之线路平面的两个切片图，二者以不同比例放大.

（Clapeyron）和拉梅（Lamé）于1827年所作，从圣彼得堡（在俄罗斯）的《运输杂志》第10卷中可以找到。卡尔·弗雷德里克·高斯（Karl Friedrich Gauss, 1777—1855年），乃哥廷根大学的教授，历来被当作最伟大的数学家之一，他也研究过这个问题。高斯对纯数学和应用数学的几乎所有的领域，以及物理学、天文学和测地学都作出了贡献。他的许多发现都确实是科学史的里程碑。1836年，高斯在写给他的一位合作者、朋友——天文学家舒马赫（Schumacher）的信中提到过斯坦纳问题，涉及如下一项工作：在四个城市——哈堡（近汉姆堡）、勃莱曼、汉诺威、布朗恩希威格——之间建筑一个长度最短的铁路系统。他甚至想把这个问题作为有奖征答题介绍给哥廷根大学的学生们。但直到1879年，唯有博普（K. Bopp）——该大学的一名学生才给出了四个城市（即 $n=4$）的广义斯坦纳问题的完全解。关于讨论广义斯坦纳问题[1]的论文多得已几乎不可计数。

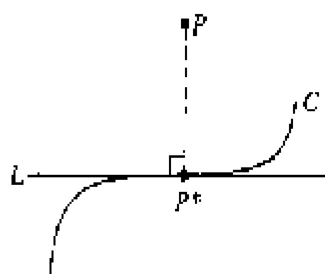
再谈最短联线

另一类极小问题是寻找一点到一条曲线或两条曲线之间的最短路线。根据毕达哥拉斯定理，确定从一点 P 到一条直线 L 的最短联线，只要作 L 的一条垂线即可。此垂线是通过 P 点，并与 L 线在某一点 P^* 交成直角的直线。



从一点到一直线的最短路线。

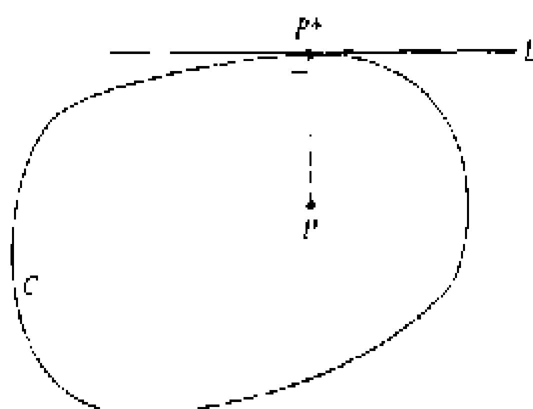
由这个事实推断，从一点 P 到一闭凸曲线 C（假定 P 在 C 的内侧）的最短联线与此曲线在某一点 P^* 交成90°角。仅在 P^* 点画出 C 的切线；线段 PP^* 就给出 P 到 L 的最短距离，那么在 P^* 点被 L 和 PP^* 形成直角。



从一点到一光滑曲线的最短路线。

最后提一下，甚至对任意的光滑曲线 C，某点 P 与它之间的

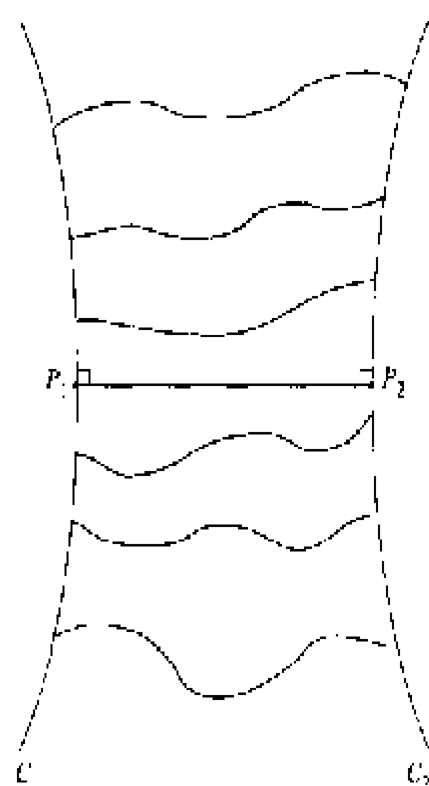
[1] 术语"斯坦纳问题"可能是库朗（Courant）和罗宾斯（Robbins）在其通俗著作《数学是什么？》中杜撰的。斯坦纳只是顺便论及过 n=3 的情况。



从一点到一闭凸曲线的最短路线.

最短联线，亦跟它交成直角；但对此结论的确切证明需要一些微积分知识.

同样，联结两条曲线 C_1 和 C_2 的最短路线与二者均交成直角. 回想序文中提到过的：肥皂膜若在别的表面上自由移动，总与其垂直相交，而某些物质的裂缝也彼此交成 90° 角.



联结两条光滑曲线 C_1 和 C_2 的最短路线，与二者均交成直角.

曲面上的最短曲线，短程线

在下面的讨论中，读者将看到：正交性对于另一个三百年前的老问题——本章开头陈述过的最短联线问题有重要的作用，该问题乃指寻找一曲面上的两点之间的最短路线；它本是、并继续是几何学中的一个基本问题.

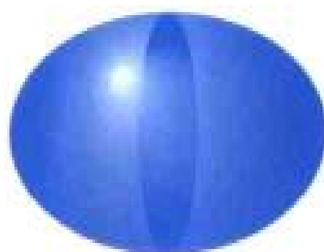
据我们所知，希腊人认识到，平面上两点之间的最短联线总是直线，而且还了解，光在均匀的（各向同性的）介质中总是沿此最短路线（或至少在局部范围里是最短的路线）行进.

然而在曲面上通常并无直线. 甚至对于诸如球面、圆柱面、圆锥面等简单曲面，其上的最短路线是什么，也并非十分了然，


圆锥面


圆柱面


球面


椭球面


双曲面

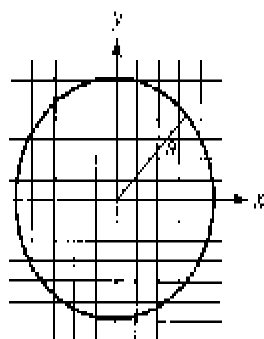

更复杂的曲面

这些曲面上任意两点之间的最短联线是怎样的曲线？能用几何状况表征它们吗？或换言之，凭藉怎样的性质，将最短的曲线与其他任意曲线加以区别？

而对于更复杂的曲面，就更难找到其答案了.

数学家在可能解答此问题之前，一般说来，必须先对何谓曲线和曲面，有一个清晰的看法. 显然，它们不是物理世界的实体，而只不过是这些实体的理想化形式，与古希腊人所创造的形式相类似. 简略地说，我们可以认为：数学中的曲线和曲面是这些物理实体的理想化模型，而日常生活中的物理实体以曲线和曲面来表示；区别“具体的实体”及其“数学模型”总是重要的事，但往往难以区别.

古希腊人很难以一般形式定义诸如“曲线”和“曲面”这

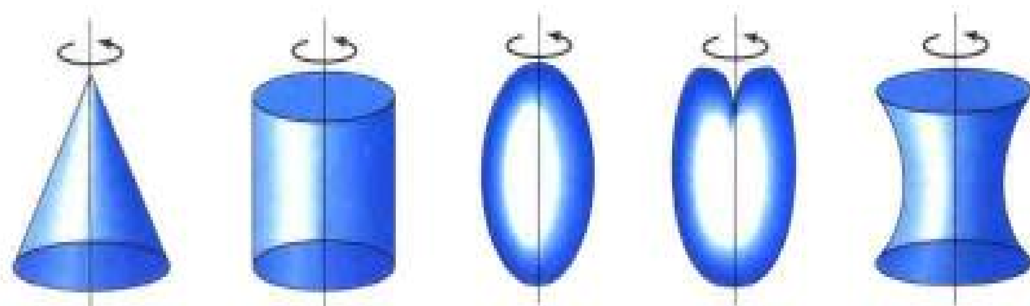


方程$x^2+y^2=a^2$描绘中心在$x=0$，$y=0$点，半径为a的圆。

样的实体，因为他们的代数没有很好地发展，而总是保持在颇为原始的水平上．事实上，某些科学史学家认为，希腊数学最后之所以停滞不前，是由于希腊人未能发展代数，并把它应用于几何．从而得到的几何学大致是综合性的，谈不上是解析性的．而解析方法可以凭藉代数，即凭藉采用字母或其他符号以取代特定数字进行符号运算的技巧，获取相当的便利．代数和几何的结合，直至17世纪才实现．其时笛卡儿和费马创造了一种有效的数学工具，此即解析几何．它用数字和方程表示几何．譬如说，一条平面曲线，就是用一个把变量x和y相互关联的方程描述，在惯用的方格图纸上把x和y彼此相对地标绘出来．例如，公式$x^2+y^2=a^2$描绘中心在$x=0$，$y=0$点，半径为a的圆．其次，这不是一个用微积分定义"曲线的长度"、"曲面的面积"、"立体的体积"之类概念以及计算许多有趣的几何体的长度、面积和体积的大问题．近乎同样的定义还在被使用，并年年被众多的一年级大学生在学习．这里不必研讨数学技巧的细节，但必须至少明白这样一个事实：若不确立准确的数学概念，若不发明灵活而有效的技巧，数学就不会发展，从前如此，以后也永远如此．因此，本书以及其他通俗文章的读者或许能理解数学无处不在，但倘若没有学过必要的细节，恐怕就不能演算数学，"因为在数学中没有平坦的大路可走"．

对曲线和曲面，对长度、面积、切线、切平面、曲率等等的数学定义，到17世纪后期和18世纪前期，主要由卡瓦列利、牛顿、伯努利兄弟、莱布尼兹，特别是由欧拉阐释的，而其他许多数学家也参与此定义工作．

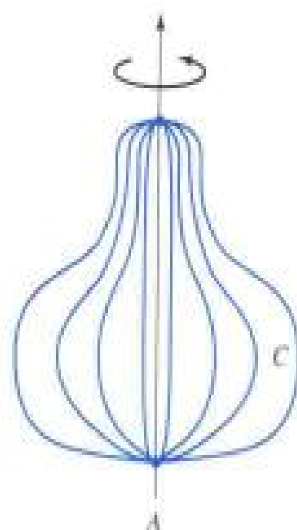
下面开始讨论曲面上的最短路线问题，且考虑三种旋转曲面（或曰回转曲面）：圆柱面、圆锥面和球面．



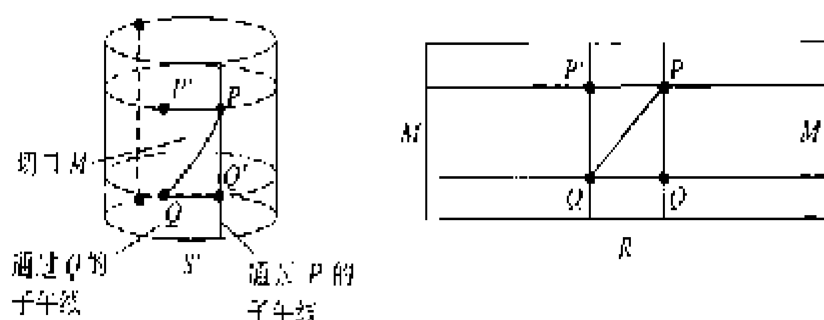
各种旋转曲面.

圆柱面包含直线——其子午线(生成旋转曲面的直线),它们无疑是最短联线. 且解释一下子午线这个重要概念. 设想一平面曲线 C,位于一轴线 A 的一侧,使其绕 A 旋转,便生成一旋转曲面,如右下图所示. 此旋转过程中不同位置上的 C 线均称为该旋转曲面的"子午线". 它们是此曲面的生成曲线(母曲线). 例如,采取这种方式,由半圆线生成球面,由平行于旋转轴线的直线段生成圆柱面,由半椭圆线生成椭球面. 其他可能的情况见上图.

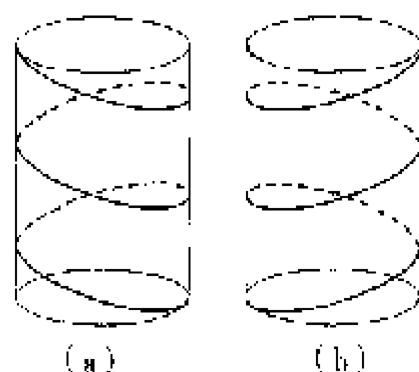
对于一圆柱面 S,它的一条子午线上有任意两点 P 和 Q,二者之间的直线段就是它们在该曲面上的最短路线. 而如果 P 和 Q 不在同一条子午线上,情况可能如何? 其实,这并非真是一个问题. 我们好容易才想起,可以把每个圆柱面铺展成平面;这就是每个房屋漆工用滚筒漆墙壁时所做的事情. 为说明起见,假如把 S 面想像成一根香肠的表皮,则此问题多少简单一些. 把香肠切下一段(上面切于 P、下面切于 Q),即用两个与圆柱面之轴线相垂直的平面与其相交(见下一页的上图). 沿着一条适当的子午线切下一片,于是可以无破损地把切剩的表皮 S' 铺展成一平面 R,其形状为长方形. 那么,S' 面上的每一条线就转变成 R 面上的某一条线;反之亦然.



生成旋转曲面的子午线.



圆柱面上两点之间的最短联线.



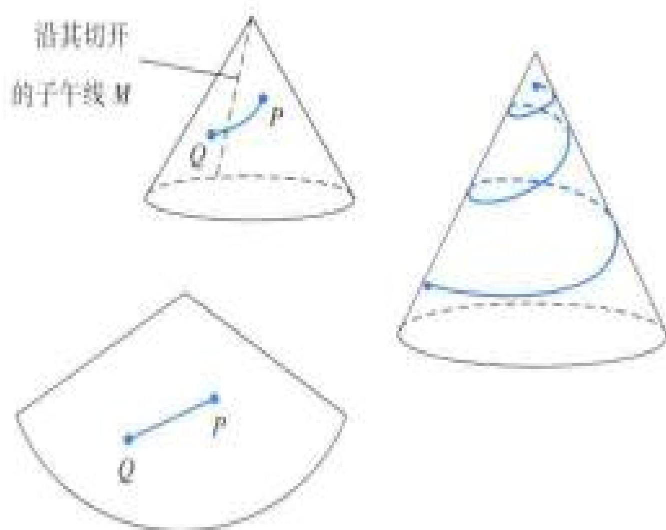
螺旋线：(a)左旋；(b)右旋.

因为把表皮S'铺展成平面时毫无损坏，故而S'上的任何曲线的长度都不改变；那么，这种使S'转变成R的映照被称为等距映照. 因此，S'上的最短路线对应于R上的最短路线. 而对于R上的最短路线，我们是知道的：乃是直线. 接下去，反过来操作，把R（像一张树皮）卷拢，又成为香肠表皮，则直线转变成螺旋线或圆周线（压扁了的螺旋线），抑或直线. 所以，S'面上的P和Q之间的最短联线是螺旋线（即螺钉上的螺纹线）的一部分（螺旋线见左图所示）. 这是自然界中经常看得到的曲线.

如果考察圆锥面上的最短联线，情况亦很类似. 注意到每个圆锥面S都能铺展成一个平面区域；其实，只要沿一条子午线切开，就能将其无破损地铺展成平面的一部分. 再次利用平面上最短联线就是直线这个事实，便立即得到S面上的最短联线；只需将S面的平面映像再卷成圆锥面即行.

可用同样的步骤求得多面体表面上的最短联线，将其某些棱边切开，也能无破损地铺展成一个平面.

可是，大部分曲面（包括球面）的情况并非如此. 且试试把一个球面（譬如说，一个橡皮球）铺展成一个平面区域，你会发现，倘若不把橡皮拉长、撕坏，那是办不到的.



圆锥面上的最短联线.

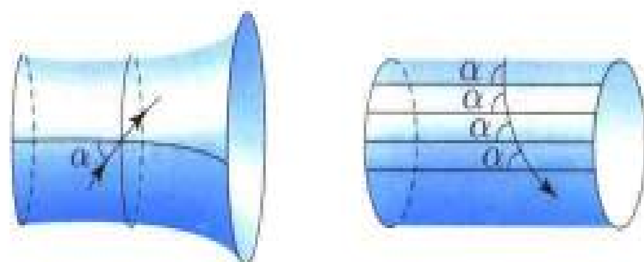
数学上能证明，球面没有哪一部分可无破损地映照成一个平面区域. 此证明乃基于卡尔·弗雷德里克·高斯引入的一个概念——曲面的曲率，而今称其为*高斯曲率*. 曲率精确地标度了曲面上每一点的弯曲程度（这个概念的定义见第5章）. 高斯的著名定理是指，若知道曲面上每条曲线的长度，便能计算其曲率. 高斯的这一结论，更精确一点地陈述为：由度规（即长度之度量）确定曲面的高斯曲率.

为了弄清球面何以不能无破损地映照成平面区域，我们且计算半径为R的球面的高斯曲率，各点的数值相同，均为$1/R^2$. 然而平面区域的曲率处处为零. 如果是等距（保长）映照，则必有$1/R^2=0$；这当然是不合理的.



卡尔·弗雷德里克·高斯.

高斯将此重要结论称作*非同寻常的定理*. 这是他于1827年出版的《关于曲面的一般探究》一书的主要结论，被评定为数学中最重要的发现之一. 且解释一下为什么不能绘制一幅我们行星表面的完善地图：探求地图上各条曲线的长度均匀地正比于地球上相应曲线的长度，乃是没有价值的. 用来制作地图



克雷朗特定理的两幅图解.

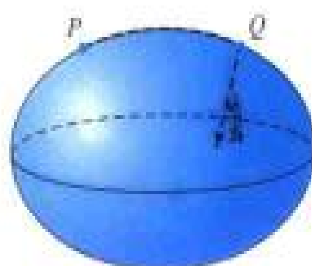
的各种投影方法都有某些缺陷;唯允许我们在具有各种误差的地图之中进行选择. 但各地图可能都有一种特色. 地图绘制者或许会发现, 地球是这样表示的: 其各线条之间的夹角(而非长度)保持不变. 默卡托投影法正提供这样一种"保角地图".

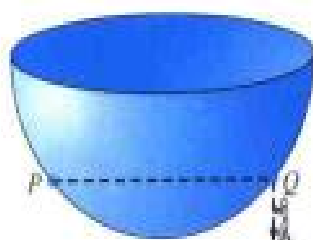
尽管不可能铺展球面, 但总还是可能找到其所有最短联线. 它们必定是球面上大圆线的一部分, 因为球面沿着所有方向都是对称的, 而旋转曲面的每条子午线都确保其上任意两点之间是最短联线.

对于一般的旋转曲面, 法国数学家克雷朗特(A. C. Clairaut, 1713—1765年)——莫佩蒂的拉普兰探险队之一员, 发现如下引人注意的结论:

> 沿着最短联线C, 不同纬度的圆半径r跟C线相对于与其相交的子午线之倾角α的正弦之乘积, 其取值总为常数, 亦即对于C线上的任意点$r\sin\alpha=$常数.

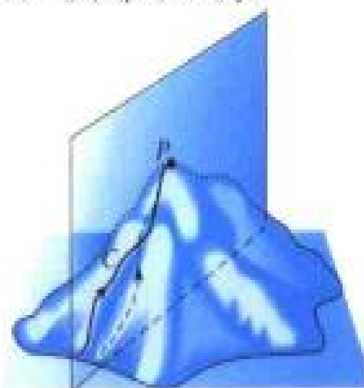
第一篇关于一般曲面上两点之间最短联线的论文乃由欧拉发表. 此论文题为"关于任意曲面上无论哪两点之间的最短联线", 载于《圣彼得堡皇家科学院述评》1728年卷, 但该刊直至





凸曲面和凹曲面上两点之间的一根拉紧的细绳子.





(a)　　　　(b)

(a) P点处的切平面和通过P点的短程线C;

(b) 短程曲线C上的P点处的密切面，虚线乃该平面与曲面的交线.


COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS III.
AD ANNVM
PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE

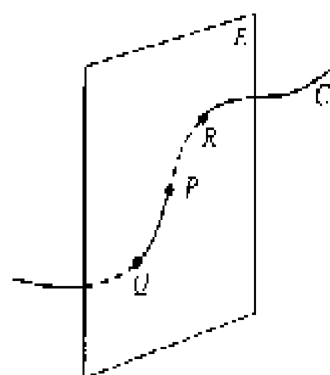
DE LINEA BREVISSIMA
IN SVPERFICIE QVACVNQVE DVO QVAELIBET PVNCTA IVNGENTE.
Auctore
Leonh. Eulero.

《皇家科学院述评》第三卷(1732年)的卷首页(上)，以及欧拉的论文(下).

1732年才出版[a]. 欧拉说，可以用简单的力学方法轻易地解决凸曲面上两点之间的最短联线问题：把一根细绳子固定在一点，并向着另一点的方向拉紧(见上图左边). 那么，绳子给出的就是这两点之间的最短联线.

显见，这种方法不适用于凹曲面. 于是，欧拉发明了一种寻找其最短联线的方法. 他把这个问题归结于求解一个微分方程. 此方程等价于约翰·伯努利于1698年提出(未发表)的一条几何定理；该定理是说：在最短联线C的每一点P，相应之C的密切面与曲面在P处的切平面交成直角(见图). 伯努利定理

[a]科学史学家曾有一段时间认为这篇论文的完成日期有误，欧拉不可能在1729年之前提交发表. 目前的研究似乎表明，这篇论文可能在1728年底写成.



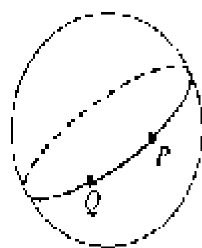
一曲线上三点P、Q和R确定一平面F，它趋近于密切面

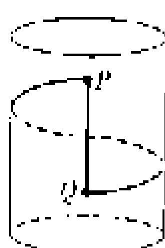
中的密切面是什么呢？在C上另取靠近P点的两点Q和R. 通常，这三点P，Q和R便确定了一个平面. 当然，这个平面取决于Q和R；但如果二者在C上向着P移动，该平面会达到一个极限位置，此极限平面就称作C线在P点的密切面.

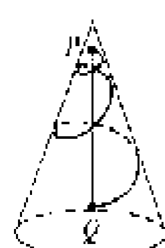
下文论及的短程线这个名词，它是就曲面S上的所有曲线C而言的. 在曲面S上的每一点P，其C线的密切面与S面的切平面相互正交. 那么，伯努利定理乃指，长度最短的曲线必定是短程线的一部分.

原来，短程线的“足够小部分”总是给出其两端点的最短联线；通常，其“甚大部分”并不具有极小性质. 例如，在球面上，所有短程线是指大圆线的各部分. 那么，对于任意两点P和Q——二者并非球面直径之相对两端点（犹如地球的北极点和南极点）——确实存在一个通过此两点的大圆. 而且，P和Q把圆分成两段弧，其中短的一条是P和Q之间的最短联线，而另一段弧虽然亦是短程线，却不是最短联线（见下图）. 下图还表示圆柱面和圆锥面上的两点P和Q；此两点由一条最短联线联结，还由其长度并非极小的一条短程线联结.

诸如球面、椭球面和圆柱面等完全曲面被定义为这样的曲面：可以在其上沿每一条短程线以恒定速率移动而始终不会脱离该曲面. 如果在球面上移动，可以返回到出发点；而如







曲面上的两点有时可由不止一条短程线联结.

果在圆柱面上沿螺旋线移动，则不可能返回到出发点．我们必须强调这一事实：欧拉并未证明完全曲面上两点之间必存在一最短联线；他只是给出这样的联线必须满足的条件．最短联线的存在性证明直到1900年由大卫·希尔伯特（David Hilbert）作出．



大卫·希尔伯特（1862—1943年）是他那个时代的第一流数学家．

对短程线的研究有一个令人遗憾的开端．1697年8月，约翰·伯努利公开提出寻求凸曲面上两给定点之间的最短联线的问题；这被看作为对其兄长雅各布的挑战．弟兄俩发生公开争执，而且彼此间不愉快的对抗愈益加剧．他们的论战如此之难堪，以致当时一些科学杂志竟都拒绝发表其结果．让我们回顾一下这场论战，此乃许多著名的科学辩论中的一场．

在1666年到1680年之间，牛顿和莱布尼兹发明微积分．显然已证实两人是独立地找到这种有效的数学技巧的．但是牛顿的方法直到1711年才发表，而莱布尼兹的主要观念最早见诸于1684年在莱比锡出版的《博学学报》．莱布尼兹的出版物甚少且颇为隐蔽．第一个对其理解的人是雅各布·伯努利．他于1687年起担任巴塞尔大学的教授．雅各布教给他的弟弟约翰一些微积分的奥秘，这倒并非借助于莱布尼兹的发明，而是由他重新发现的．因此，至1690年，牛顿、莱布尼兹以及伯努利兄弟俩是能够掌握微分运算和积分运算之仅有的几个人．看来，从那时起，兄弟之间的竞争已经开始了．约翰关于寻找曲面上两点之间最短联线的挑战为雅各布所响应，雅各布于1698年解决了所有旋转曲面上的这类问题．约翰自己最初陈述这个问题时本亦局限于旋转曲面，他同意其兄的结论；但又批评涉及的曲面太偏窄，因为雅各布已经处理的只是旋转曲面．约翰在自己的论文中宣布，他已找到任意曲面的最短联线问题的解．他的主张实际上被证明是正当的吗？约翰在1698年8月写给莱布尼兹的信中似乎证实了他的断言；在这封信中他陈述了“密切面定

ACTA
ERVDITORVM
ANNO
M DC XCVI
publicata.
LIPSIÆ.

《博学学报》（1696年）之卷首页．

律". 莱布尼兹很快作出答复，他赞扬约翰的解答. 大约在三十年之后於1727年12月，约翰重新提出最短联线的问题. 这一次是向其学生欧拉求问. 此乃导致欧拉于1728年论及这一课题的论文. 欧拉之论文的发表使约翰依然坚持其关于所发现的最短联线问题之解答的主张. 1742年，欧拉声称已于1728年写信给伙伴克林根斯纳（Klingenstierna），把解答告诉了他.

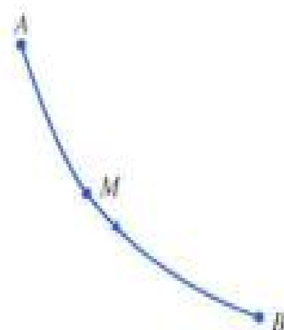
约翰的断言如今已被接受. 但过去长期被怀疑，人们对其所以然疑惑不解. 他的自我吹嘘、以及并不彻底的傲慢意识，肯定既起作用. 洛必达出版微积分书一事，也解除了对约翰断言之真实性的疑虑. 这是偶然发生的一件事. 乃指1691—1692年间，约翰在国外旅行途中邂逅德·洛必达（de L' Hospital）侯爵——法国当时最好的数学家. 为了兑换一笔可观的养老金，约翰承诺：把一切微积分方面的最新发现都通知侯爵，并在其有生之年始终对于他们的约定缄口不言. 洛必达把约翰给予的信息编成第一本关于微分学的教科书，并于1696年出版. 约翰为此颇为不悦，但因有先前的承诺，也就无话可说. 直到洛必达死后，他没有提及与其所作的约定，只是要求承认对于这本书之部分内容的发明居先权[1]. 于是人们怀疑起来，就必然使这位伟大的、然而贪财的数学家的声誉受到损害. 至1921年，约翰本人关于微分学的手稿被发现. 对照洛必达的书和伯努利的手稿，才证明这位瑞士数学家乃是洛必达之微分学书的真正作者.

比最短联线问题甚至更重要的另一个问题由约翰于1696年6月提出. 这就是后来为人们熟知的"最速降问题"或"最速降线问题"：

---

[1] 对表式(0/0)求值的洛必达法则也为有名.

对于直立平面上的两给定点 A 和 B，找出二者之间这样的联线，动点 M 在重力作用下沿此线可能最快地从 A 点降落到 B 点.



最速降线问题.

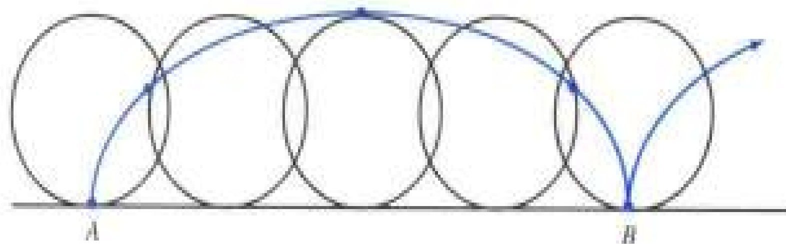
你或许会设想，一个颇重的小球沿某一条轨道无摩擦地滑动，从 A 滑到 B，所花费的时间可能最少；此轨道的形状如何呢？肯定不是联结 A 和 B 的直线. 1638 年，伽利略断言乃是一段圆弧，这不正确. 那么，正确的解答又怎样呢？

原来这是一种众所周知、迄今已充分研究了的曲线，非为圆弧，但是与圆密切相关：就是摆线（旋轮线），亦即圆的滚动曲线；这在第 2 章里已讨论过.

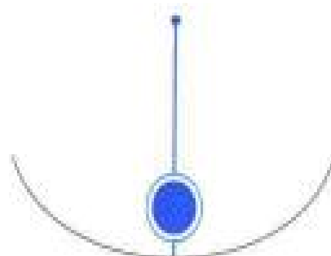

克里斯蒂安·惠更斯（1629—1695 年）

杰出的法国数学家布莱斯·帕斯卡（Blaise Pascal）于 1649 年研究过摆线，当时他因牙痛而十分不适意. 他为了使自己从痛苦中分心出来，便开始研究此滚动曲线. 当牙痛消失后，他将这视作上帝欣赏其研究思想的标示. 帕斯卡的研究成果促使其他数学家也去考察这种曲线，紧接着发现该曲线的一些逗人性质. 其中最有趣的性质乃由荷兰物理学家、数学家克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens）觅得的.

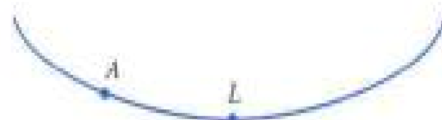
惠更斯最有名的成就是发明了摆钟，他因此而于 1657 年从



摆线.



圆形摆.

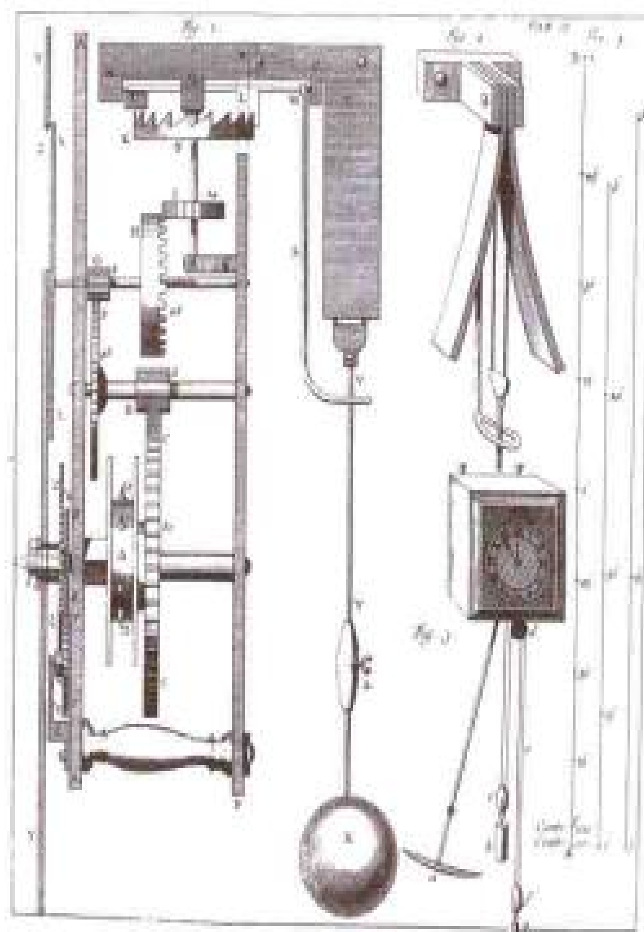


摆端点的轨迹.

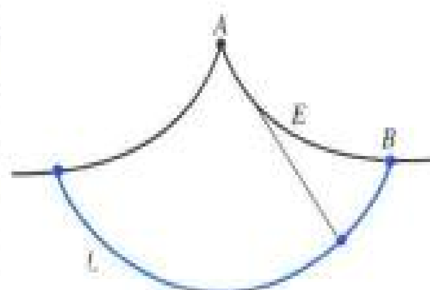
荷兰政府获得一项专利. 但惠更斯并不满足于此发明，因为他了解，摆锤摆动一个完整周期所需之时间与摆幅有关. 换言之，圆形摆不是等时摆，来回摆动时不总是花费相同的时间；这就导致令人遗憾的钟之走时的不规则性. 于是，惠更斯试问：有没有完善的摆？他想，若有，就必须以这样的方式构成——摆端在等时曲线上摆动. 有一种曲线，质点在其上无摩擦地滑动，从任意起始点 A 到曲线的最低点 L 所花费的时间总是相同，不管 A 点超出 L 点的高度若何.

惠更斯发现，等时曲线无非就是摆线. 这位最伟大的时钟制造人——正如人们所称呼他的——在其论文"摆钟"（1673年）中设计了一只摆钟，钟摆在一条摆线上摆动. 此装置如下图所示.

惠更斯的摆钟. 摆锤在一对摆线形部件之间摆动. 此图取自"摆钟"一文（1673年）.



就工艺技巧而言，是采用一柔软的摆，使其在两摆线形部件之间摆动．此技巧乃基于惠更斯之美妙的数学见解：摆线的切展线依然是摆线；其意如下所述．设想一柔软、但不能伸长的线状物敷设于一条摆线的一段从 A 伸展至 B 的弧 E 上（见右图所示）．将此线状物背着 E 弧拉紧，使其自由端总是沿 E 弧的切向、且背着E而滑动．于是端点 B 描绘出曲线 L，L 称为切展线，而 E 称为渐开线（展开之意）．那么，两摆线之间的摆动之相应的切展线和渐开线二者都是摆线！



完善的摆：摆线的切展线还是摆线．

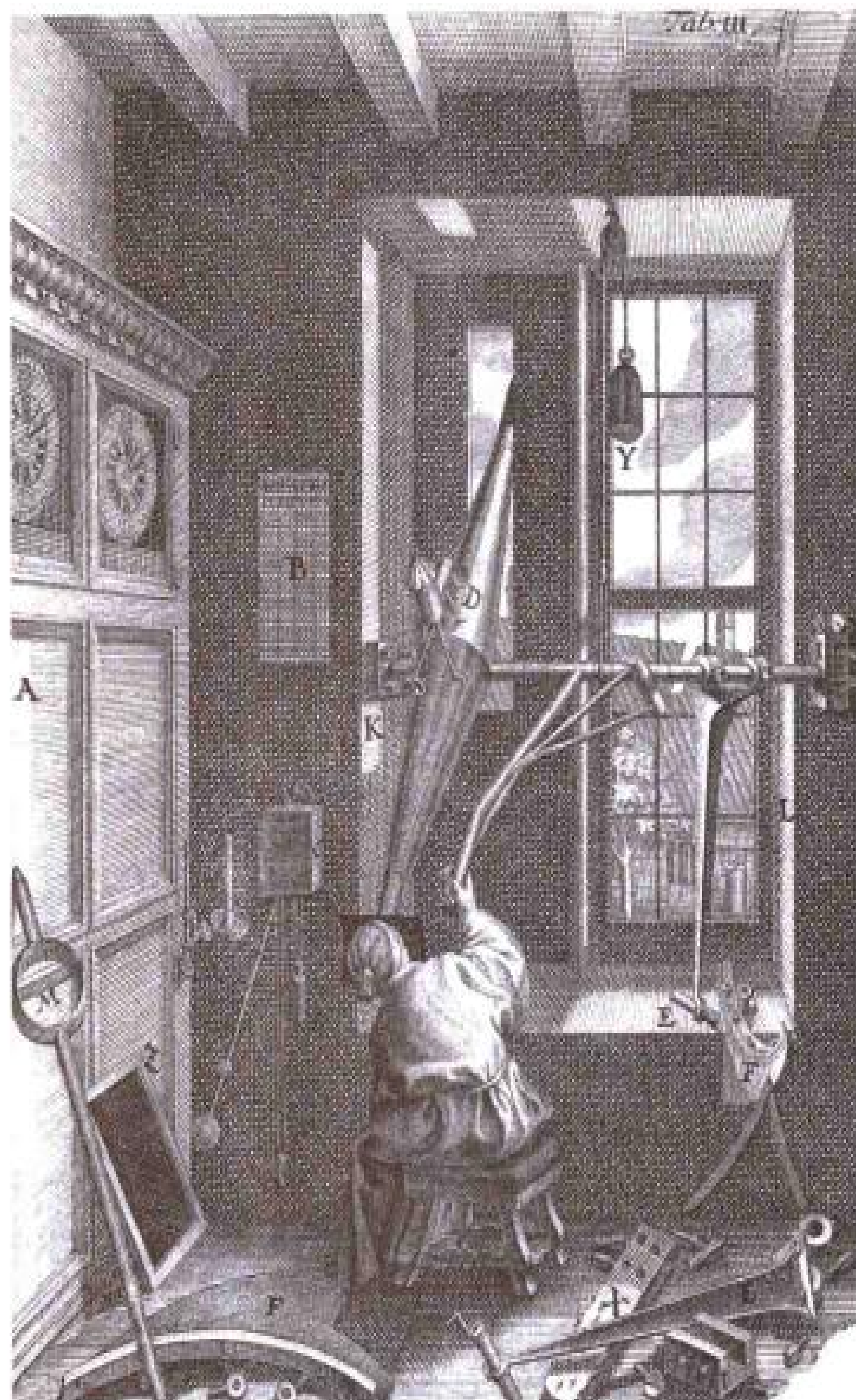
由此，我们看到在约翰·伯努利于1697年提出挑战的那段时期里，对摆线已经研究得颇为出色；于是可以想像，数学家们对于找到的竟是最速降线（捷线）会如何地惊奇，最速降线就是约翰要求其哥哥雅各布去寻找的东西．

1696年12月，约翰在《博学学报》中宣布了他所提出的问题，要求在1697年复活节之前得到答复，并报告说，莱布尼兹已经找到答案．那时有五位数学家解决了这个问题，他们是：约翰和雅各布弟兄俩、牛顿、莱布尼兹和洛必达．让我们看看约翰是如何解决最速降线问题的．

他的论证思路主要在于：把重质点的最速降线问题转变成为一个光学问题．就是说，约翰注意到伽利略关于物体沿确定的曲线下落的定律意指：此物体的运动方式与光微粒在具有确定密度的空气里的行进方式相同，空气密度取决于超出地面的高度．于是，约翰利用了法国数学家皮埃尔·德·费马的一项成果；费马是土鲁斯城的一名法官，又是有史以来最伟大的数学家之一．费马已经发现，光折射定律是由如下假定导出的：光总是沿着最速路径从一点传播到另一点（此假定现称为费马原理[1]）．


皮埃尔·德·费马（1601—1665年）．

[1]反射定律的赫伦证明是对于费马原理的另一项应用．



丹麦天文学家奥莱·勒默，通过对木星的卫星蚀的观测证实光乃以有限速度传播．此版画［取自奥雷勃（O.Horrebow）的《数学物理著作集》第3卷，哥本哈根，1741年］表示勒默和他那对于观测十分重要的一些精密仪器（包括摆钟），以及他的新望远镜．



折射定律.

折射定律[在费马的年代，此定律的发现被归功于勒内·笛卡儿，但而今知道乃由荷兰人维勒布罗德·斯内尔（Willebrord Snell，1591—1626年）所发现]说：在两种均匀的光学介质的交界面上，折射角的正弦之比反比于此两种介质的密度之比，或写作

$$\sin\alpha_1 \;/\; \sin\alpha_2 = n_2 \;/\; n_1,$$

光微粒在一种介质中的行进速度则反比于该介质的光密度.

约翰把大气分解成一些很薄的、其密度为常数的空气层，再利用折射定律，然后令空气层厚度渐渐缩小为零，由此实现求极限的步骤. 从而导致一个关于最速降落曲线的方程；并且，约翰辨明其解即为摆线.

值得注意的是，约翰·伯努利已经把光学领域与数学领域成功地联系起来；及至一百多年以后，伟大的爱尔兰数学家威廉·R·哈密顿（William R.Hamiton，1805—1865年）提出其变分原理，该原理实际上使当今科学中的几何学与物理学统一起来.

DE

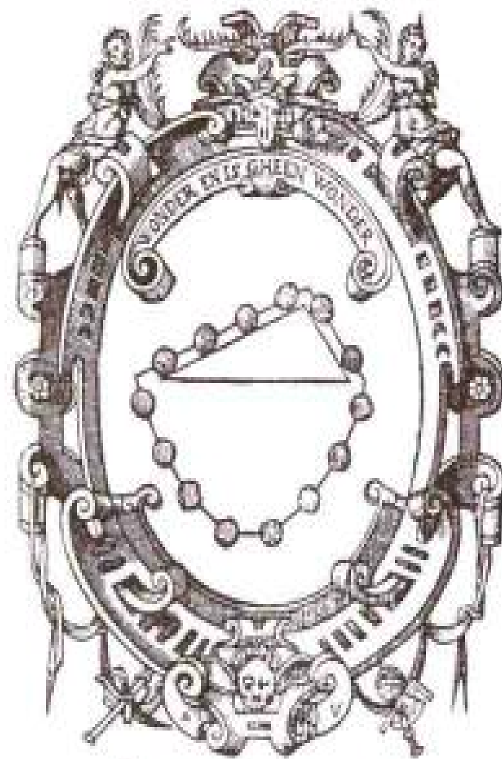
BEGHINSELEN

DER WEEGHCONST

BESCHREVEN DVER

SIMON STEVIN

van Brugghe.



TOT LEYDEN,

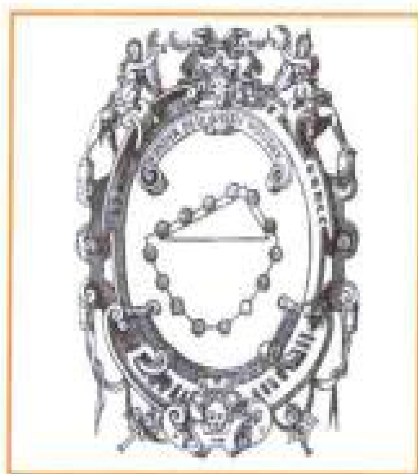
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,

By Françoys van Raphelinghen.

cIↃ. IↃ. LXXXVI.

西蒙·斯泰芬著作之初版（莱顿，1586年）的标题页.

4 奇迹，平凡无奇



整个宇宙的模式最为完善，实系大智大慧的造物主所精心规划过的，世上没有一件事物不是按照极大、极小原则而发生；此原则以某种方式闪烁其光辉。

莱昂纳德·欧拉

（1744年）

本章有待讨论，物理体系的平衡态如何可能以数学方式予以描述；尤其希望知道，稳态平衡是怎样表征的？犹如，每个人都乐于生活在平稳的家园里，却原来，这些问题可以转化为与变分法相关的某些课题．对物理体系引入势能概念后，就可以将体系的稳定平衡态这样来表征：其势能比体系其他邻近的任何状态均小．描述稳定平衡态的原则，就是利用极小原理，此乃约翰·伯努利的虚功原理的特殊形式．莫

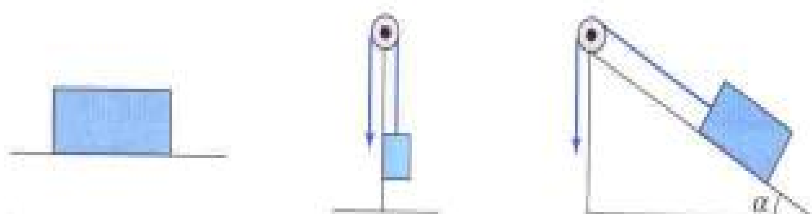
佩蒂－莱布尼兹－欧拉作用量原理从一切虚拟的（即可能的）运动中标示出真实的运动；而凭藉伯努利原理，从体系的一切虚拟位置中拣选出稳恒的静止位置．这表明作用量原理和虚动原理有同样的本质，前者支配非稳过程，后者标定静止状态．

虚功原理不是从天堂里直接掉下来的，而是有一个相当长的发展过程；可能发端于古代阿基米德的贡献，后来法国工程师西蒙·斯泰芬（Simon Stevin,1548—1620年）在较近年代对其重新作了探讨．请看本章首页徽章中的题字 WONDER EN IS GHEEN WONDER，意指“奇迹，平凡无奇”．这个徽章原见于斯泰芬的一本著作的标题页，以标示他对一个古老力学问题的著名解答．

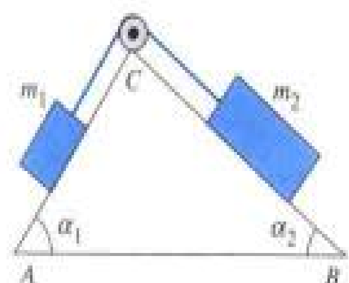
斯泰芬想知道需要多大拉力才使一个置于斜面（倾斜平面）上的重物保持平衡（见下图）．显然，如果平面是水平的，则无需拉力，因为平面负荷了重物；而如果平面是竖直的，所需拉力则最大．所以，这两种情况是极端状态，一般情况乃介乎此二者之间：使重物平衡所需的力取决于平面倾斜角的大小．

何为其精确原理？斯泰芬通过一个更一般的问题，找到了答案．他考虑一个高为h的棱柱，其底置于地面，并假定它是完全水平的．设棱柱的横截面为三角形（见下一页右图），两个表面是与水平底面分别交成α_1角和α_2角的平面P_1和P_2．那么，分别置于P_1面和P_2面的、重量各为m_1和m_2两个重物，当且仅当

重物置于水平面、贴于墙壁、置于斜面．



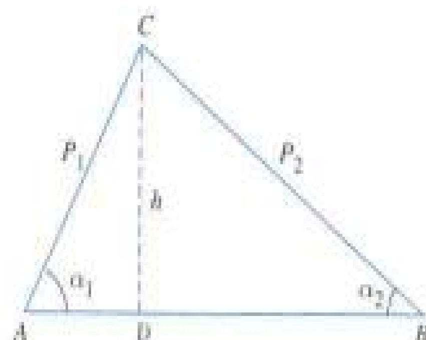
$m_1/m_2=\sin\alpha_2/\sin\alpha_1$时，彼此才得以平衡．这就是斜面定律，其证明（要点）显示于斯泰芬的徽章．



支撑两重物的棱柱．

下面说明斯泰芬的论证方式．设有一条粗细均匀、疏密一致的闭合链条围绕着这个棱柱．于是，斯泰芬讨论链条是平衡、抑或运动．链条若动，则必然恒动；因为别无他因．但是，斯泰芬认为这是不可能的；所以，链条处于平衡状态．在AB边下面的那部分链条亦然如此，因为它随意地悬挂着，没有支撑物．因此，链条的上面两部分AC和BC相互平衡．显然，它们的重量m_1和m_2正比于$\overline{AC}$和$\overline{BC}$的长度．那么，$m_1/m_2=\overline{AC}/\overline{BC}$．再则，图中直角三角形$ADC$，其$\alpha_1$角的正弦为直角边之长度$h$与斜边之长度$\overline{AC}$的比值，即

$$h=\overline{AC}\cdot\sin\alpha_1.$$



棱柱的横截面．

同理，由直角三角形BDC得

$$h=\overline{BC}\cdot\sin\alpha_2.$$

由这两式即有

$$\overline{AC}\cdot\sin\alpha_1=\overline{BC}\cdot\sin\alpha_2.$$

或

$$\overline{AC}/\overline{BC}=\sin\alpha_2/\sin\alpha_1.$$



用一根链条围绕棱柱．

将此式与$m_1/m_2=\overline{AC}/\overline{BC}$相结合，便得到所需求的关系式

$$m_1/m_2=\sin\alpha_2/\sin\alpha_1.$$

倘若以重量为m_1和m_2的重物替代链条的AC部分和BC部分，这两重物同样是相互平衡的．

斯泰芬的论证确实引人注目，它把一个困难的问题变成几乎是一目了然的陈述．其思路源于阿基米德的传统思想．斯泰芬的确是自古以来最早阅读过阿基米德关于静力学和水力学方面的著作、并已读懂了的学者中的一位，他的主要工作是把阿基米德的观点现代化了．

阿基米德著作的卷首页．

阿基米德对于力学的贡献中只有两项留传给后人，那就是《论浮体》和《平面的平衡或平面图形的重心》．这两部著作于1543年，由尼科洛·塔尔塔利亚（Nicolo Tartaglia，1506—1557年）——一位与施泰芬同时代的意大利数学家——首次出版．阿基米德的希腊文和拉丁文的全部著作之初版由托马·吉昌夫（Thomas Gechauff）编纂，他采用由雅可帕·达·克雷莫纳（Jacopo da Gremona）翻译的拉丁文稿，于1544年由著名的印刷商约翰内斯·赫韦根（Johannes Herwagen）在巴塞尔印制．

在《平衡》一书中，阿基米德把纯数学领域里的成果用来解决应用科学领域里的问题．他根据置于正文前面的七条几何公理导出机械结构平衡的理论．凡欧几里得在几何学里做的，他就用来处理力学问题．这样，他首先建立了作为物理学一部分的力学理论，此乃对于科学进一步发展变得十分重要的一项成就．

滑轮［取自奥扎南（Ozanam）的《数学词典》（1691年）］．

在《平衡》一书中，阿基米德处理了关于古代使用的一些简单机械，诸如杠杆以及劈、斜面、滚子、滑轮的问题．（凭藉这些机械，竖起像埃及的金字塔、希腊的教堂、罗马的导水管道那样令人惊叹的建筑，以标志古典文明的灿烂．）他灵活地运用重心概念，但始终未给出此概念的明确定义．人们有种种猜测：为什么阿基米德一直未说明重心的定义．某些学者设想，这个概念已被更早期的科学家定义过，或者就是阿基米德在其一本如今已佚的著作中作出过定义．这件事尚无定论，但我们且假



马内斯（Manesse）原稿（约1330年，藏于海德堡大学图书馆）中的滑轮.

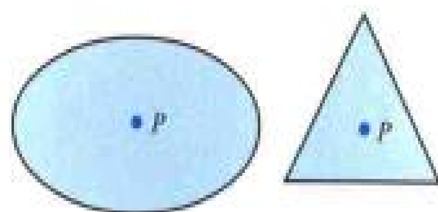
定读者已知道“重心”这个术语的含义. 亚历山大里亚的帕普斯在大约公元340年给出如下解释（对于凸形物体此解释肯定正确，虽然一般并不令人满意）：

> 任何物体的重心是物体内的这样一个点：倘若物体在该点被悬挂起来，则就保持静止，并维持其原来的姿态.

如果物体呈凸形，就是说，如果联结物体任意两点的直线也包含在物体内，那么帕普斯的定义是完善的，因为在这种情况下重心在物体内部. 但一般，重心可能不被物体本身包含其内. 下面我们且将上述定义以适当方式予以修改. 譬如说，设物体B，增补以无重量物质并与B紧密连接；这样所得之物体为包含B在



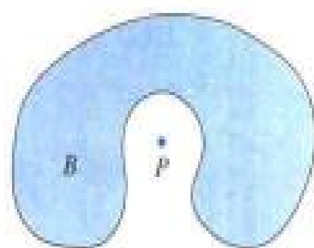
惠更斯的摆钟里的滑轮（取自其《著作杂集》第一卷，莱顿，1724年）.



平面内两个凸形物及其重心 P.

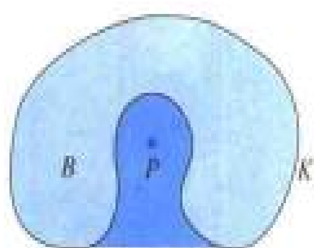
内的最小凸形物体 K. 那么 B 的重心就简单地定义为 K 的重心（见左图）.*

换而言之，知道一给定物体的重心，就可完全确定其静止位置. 读者将很快明白，甚至可能利用重心来描述物体的平衡问题，并得以表征其稳恒状态. 阿基米德凭藉这样的洞察力描绘所有作用力如何相互平衡，并由以而能构造种种颇为有效的机械器具. 他的最出色的思考成果是杠杆定律，施泰芬定律恰是其一种变形.



非凸形物及其重心 P.

在阿基米德死了一千八百年之后，诸如施泰芬和伽利略等科学家通过类似的思考，重新开始构建静力学理论，亦即关于复杂机械系统的平衡理论. 但是不必假定，在他们与阿基米德之间的那许多世纪里力学知识陷于空白. 相反，罗马建筑师们发展了诸如拱门和拱形圆顶的新概念；显然，这需要对静力学原理有深刻的理解. 尽管早期文明建筑已经采用了拱门和拱形圆顶，但罗马人完善了拱形概念.

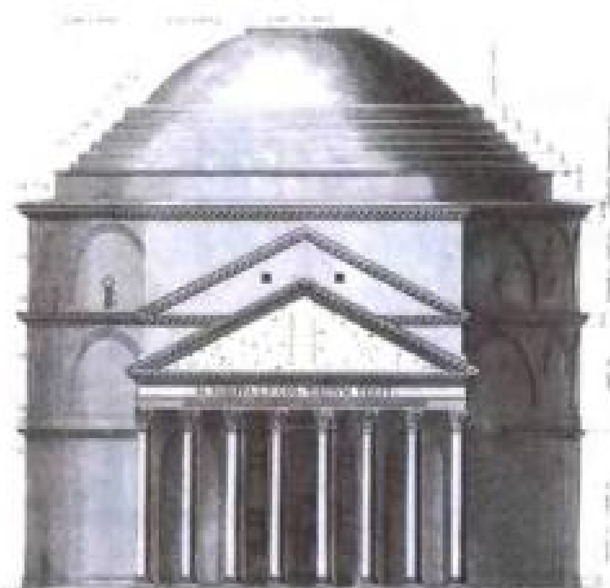


非凸形物 B 对应之凸形物 K.

万神殿是建于一千九百年之前的古罗马那些令世人惊叹不已的建筑中的一座. 它最初是用来供奉（太阳系的）七个行星星神，后来成为桑塔・马里亚・罗通达（Santa Maria Rotonda）的基督教礼拜堂. 万神庙的主殿（万神殿）是圆柱形的，上盖自撑式圆顶，其直径为140英尺，乃用混凝土建成. 这么大直径的圆屋顶，直到1890年之前还是最大的；甚至罗马的圣彼得大教堂的圆顶也比它小4英尺.

---

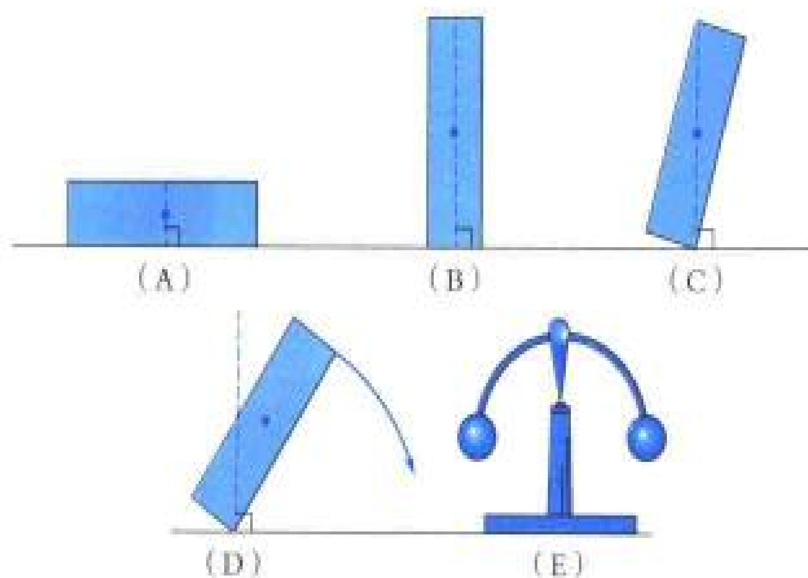
*奥托・特普利茨（Otto Toeplitz，1881—1940年）曾重指出，阿基米德已凭依一些公理而给出重心的含蓄定义，这正如欧几里得给定几何概念的方式一样. 这种想法由特普利茨的学生瓦尔特・施泰因（Walter Stein）研究过，具体见其论文"源于阿基米德的重心概念"，载于《对于数学、天文学和物理学的历史性研究》，B部第1卷，第221—244页（1931年），柏林，斯普林格.



罗马的万神殿.



罗马的弯曲结构最受赞赏的是其导水管道；许多国家里都仿效罗马人的做法. 水道的作用，过去是、现在依然是把水从山上引向城市. 罗马人热爱水，凡喷水池、公共浴池、私人宅院里都毫不吝惜地使用水. 甚至到今天，与世界所有城市的住宅区相比，罗马城拥有最充裕的供水量；还有一些招人喜欢的喷水池，在喷注的充溢和美妙方面均属一流. 想一想，曾有十四条水



长方体的平衡:(A)稳态摆法;(B)比较稳定的摆法(就是说,只要倾斜得足够小,就保持其稳定);(C)非稳态平衡;(D)非稳态,且已不平衡;(E)另一稳态平衡.

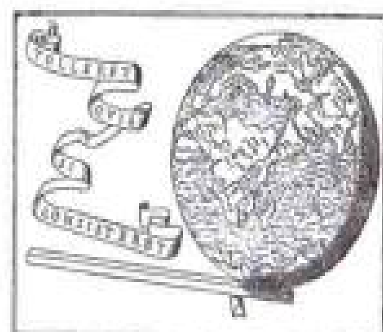
道通向这座古城,其中有些水道竟长达一百千米;这可真是一大奇观.而今有些水道仍在使用,足以提供该城所需的全部用水量.

中世纪欧洲竖起的一些建筑,甚至可能比古罗马的建筑更具魅力.依照椭圆的形状而发明了尖拱门,一条新的结构学原理随之导出.据此而建成蔚然壮观的哥德大教堂,其高雅典丽为众人所称颂.在每一个建筑工地,总见到一砖屋供匠人们在一起生活和劳作,往往前后有好几十年.

然而,人们并不知道那些建筑技巧的许多细节,因为每个石匠都已发过誓要保守秘密.直到18世纪,建立了石匠秘密组织,那些建筑秘密才可能被人探知.莫扎特(Mozart)——1784年以后成为共济会的维也纳分会的一员,他在其歌剧《魔笛》里为同伴们竖起一块纪念碑,该剧庄严、诙谐、凄婉动人、又怪诞无稽,故而二百多年来一直受到观众的喜爱.歌剧中提及石匠们的活动,使我们回忆起昔日埃及人-毕达哥拉斯信徒的境地.其实,《魔笛》的早期版本里有一幅木刻画,画的是一座埃及教堂,其正门用石匠之标记——诸如镘刀、正方形、五角星(毕达

哥拉斯五角星）作装饰.

GVIDIVBALDI
E MARCHIONIBVS
MONTIS
MECHANICORVM
LIBER.



PISAVRI
Apud Hieronymum Concordiam.
M. D. LXXVII.
Cum Licentia Superiorum.

德尔蒙特的著作《机械汇编》（比萨，1577年）的卷首页. 此图表示使地球移位的阿基米德杠杆.

文艺复兴时期，阿基米德的观念在意大利广为人知，许多博学之士都采纳阿基米德关于力学体系的重心概念以及他的其他力学观念. 莱奥纳尔多·达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452—1519年）已经认识到没有永恒的运动（没有永动机），他并发明了许多工程设备和机械器具，其中大部分终未建造，因为工程技艺还未足够地先进. 圭多·乌巴尔迪（Guido Ubaldi）[圭多巴尔多·马尔凯塞·德尔蒙特（Guidobaldo Marchese del Monte），1545—1607年]、伽利略和托里拆利解释并发展了阿基米德的观念. 他们把阿基米德的重心原理陈述为：这样一个体系，若其重心在给定限度内尽可能的低，则就处在（稳态）平衡中. 约翰·伯努利和雅各布·伯努利使巴塞尔城成为世界数学中心. 他们思索：一条两端固定的较重的链条，其平衡位置可能会怎样？他们确定，链条无非是一个由很多小硬粒及其链节组成的力学体系. 因此，链条平衡态必定由其重心的最低位置表征；一旦达到这样一个构型：不可能使任何链节降低（采用的是不抬高其他链节的方式），则便处于平衡. 在明确表达重心原理以后，约翰·伯努利于1690年发现了随意悬挂的链条之精确的数学形态. 其结论与惠更斯和莱布尼兹的相同. 此形态现用一条称作悬链线的曲线（即链线；数学上，对应于双曲余弦曲线）描绘. 对此曲线，将于第5章里处理极小曲面问题时再予讨论.

1717年，约翰·伯努利把力学体系的平衡理论推进一大步，他提出了作为静力学的基本定律的虚功原理[1]（见诸于上下文多

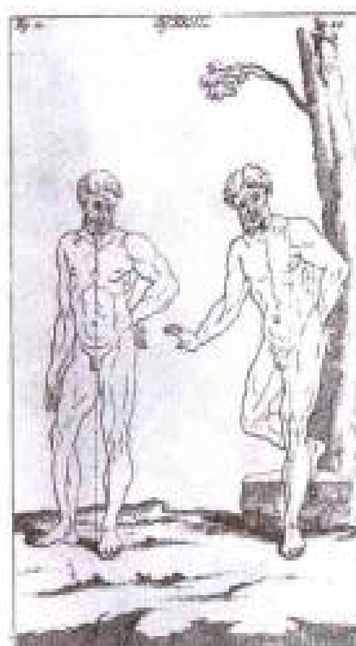


悬链线：链条的平衡位置.

[1] 约翰·伯努利在写给法国物理学家皮埃尔·瓦里农（Pierre Varignon，1654—1722年）的信中提到该原理. 此信写于1717年1月26日；被收入瓦里农的著作《新力学》（第2卷，第174页），是书于1725年初次出版.







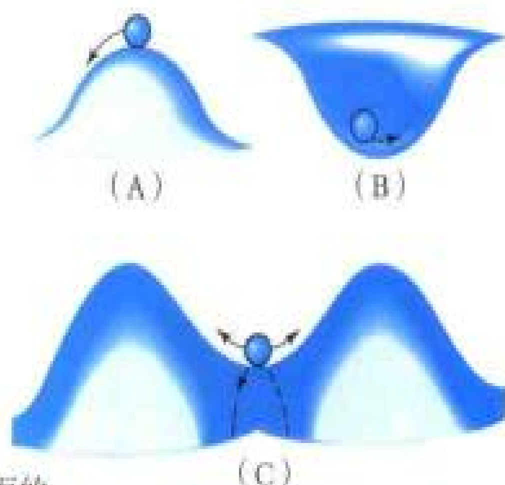


人体的平衡姿态，为画家所观察到：人体的重心必须被支撑才能保持平衡。（取自莱奥纳尔多论述绘画的论文，纽伦堡，1747年。）



小山丘上的球.

处）. 此原理意指：使给定的处于平衡态的力学体系获得无限小位移，无需对其作功. 此原则不仅支配稳态构型，而且支配非稳态构型. 为明白此意，设想一钢球在凹凹凸凸的山丘间滚动，如上图所示. 球如果位于峰巅，它即处于非稳平衡态；如果位于坑底，即处于稳定平衡态. 在峰上，稍稍碰一下球，球就离开其平衡位置；而在坑里，无论朝什么方向拨动球，球总是回到静止位置. 然而，如果球位于鞍点，它亦处于非稳平衡态位置. 此时沿某些方向，球不再返回原处；但也有些方向，只要沿其稍稍拨动球，球就会来回振动. 对于上述三种平衡位置，稍稍拨动球都不必作功（至少在一级近似下）；因为在这三种场合，平衡点处的重力作用垂直于曲面于该点的切平面，故而重力作用被地面的反作用力完全平衡.



球的各种平衡位置：(A)非稳态；(B)稳态；(C)非稳态.

通常，若不采用某种数学形式，就不易说明虚功原理；但可以不用太多的数学术语来解释此原理的基本思想，如此亦就能借以锤炼此原理. 且假设有一个量与物理体系的每个状态均相联系，这个量就是势能. 因此，可以把势能认作体系各状态的一种性能. 于是虚功原理可以表示为下述两条原则；数学家常常称其为狄里克雷原理.

原则1　物理体系的稳定平衡状态（亦即静止状态）表征为：体系在此状态时的势能比它在任何可能的（虚拟的）邻近状态时的势能均小.

为理解上面陈述的意思，可利用第1章中的那幅几何图，画的是一个合适山区里的山谷或山峰，用以说明某一问题的极小或极大的性状.于是，让我们把一物理体系的所有可能状态的集合想像成一个平面，平面上的每一点表示一个可能状态.倘若把势能认作山区各点超出平面的高度，那么山区的极低点（山谷）对应于稳定平衡态.山区在这些点上的切平面是水平的.

如所已知，在其他一些点也有水平切平面；那就是山区的极高点（山峰）和鞍点（隘口），它们被假定为对应于非稳定的静止态.通常，称对应于山区里具有水平切平面的点的那些状态为势能的稳定态.接下去，便可陈述如下的第二条原则.

原则2　物理体系的平衡态就是其势能的稳定态.

这幅几何图给出一种简单的数学框架，由以研究物理体系的平衡问题.微积分使人们精确地定义物理学所涉及的多维区域的水平切平面；再则，利用变分法可以确定位置，并表征平衡态.非稳平衡态与稳定平衡态一样重要.在大多数物理理论中，通常用一些基本方程仅仅表征平衡态，而考察其稳定性往往很难做到.



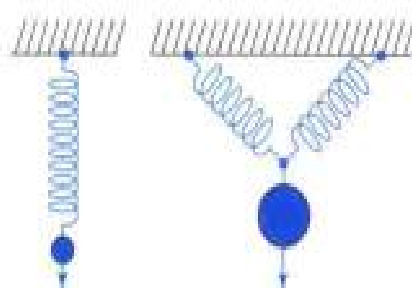
此木刻画取自伽利略的《关于两门新科学的对话和数学证明》，通过该书他建立了近代力学［由埃尔塞韦尔（Elsevier）在莱顿出版，1638年］.

当然，有另外一个至关重要的问题：属于物理模型的每个状态的势能又会如何？这里且研讨其物理的和经验的证据.为了取得对势能概念的感知，我们考虑一些简单的模型；但在这

些模型里势能究竟是怎样的概念并不明确.

如果你是滑雪运动员，当然先得上山，于是你获得势能，到达山顶则处于非稳平衡态. 稍一举步便开始你向下的滑雪比赛. 在比赛中你的势能首先转变成动能，然后因摩擦而转化成热能. 一旦抵达山谷，你就处于势能极小的稳定位置. 但如果你靠雪撬攀登一山间隘口，你会处于居间的非稳平衡位置，其势能既非极大，也非极小.

另一例子借用一弹性介质物，譬如说钟的弹簧. 这样的弹簧可能储有一定数量的能量. 开钟时，动能转变成势能，储存于弹簧内；钟走动时，弹簧把势能慢慢地释放. 待到弹簧完全松开(失去其张力)，它便处于稳定平衡态，那么钟便停了.



弹簧平衡了重物.

同样，如果我们压缩诸如橡皮球或橡皮圈之类的弹性体，便使其负载势能；而当双手不再紧压时弹性体就将所得之势能释放掉. 倘若我们不再碰它，它便失去尽可能多的势能，恢复到原先最小势能所对应之形状.

若把橡皮圈剪开，扭转一端，然后将其与另一端胶接在一起. 橡皮圈则含有内部张力，当自由搁置后，便力图松开；但得到的平衡形态与原先颇为不同.

再取一负荷重物的弹簧体系，得到另外的模型. 弹簧的弹性力抵消重物所受之重力. 再则，如果体系的势能尽可能地小，则就达到其平衡态.

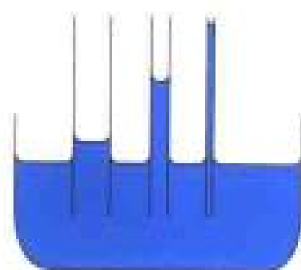
亦可取一层张在架子上的橡皮膜代替上述的弹簧，并在其上放置重物，诸如石块、甚或更有趣的东西——某种液体. 橡



载有石块或水的橡皮膜.

皮膜的平衡态形状不易推测，尽管凭经验是容易确定的. 再复杂一点，可以附加电力和磁力；那么还需要一些技巧和经验，得以求出势能的正确表示. 弹性力学领域里出现这样一个应用数学的比较困难而重要的课题，决不会全然有损于18，19世纪许多大数学家和大物理学家的重大成就.

载有液体的橡皮与日常遇到的一种现象——毛细现象相关. 1490年，达·芬奇观察到小管子——毛细管内液体的升降. 由于这个现象，表面张力理论常常被称作*毛细理论*. 何谓毛细管? 实际上难于用简单的语言描述. 似乎有点儿无谓之重复：可以说，毛细现象由毛细管力引起，而毛细管力转而起因于管内液体的分子之间相互作用以及液体分子作用于其他分子，譬如说作用于盛液体的容器之分子的电力. 这使人们进一步意识到去认定一些跟毛细管相关的现象. 上文已提及达·芬奇研究过细管子里的液体上升的现象. 而如下现象是毛细作用的另一实例：水滴只要不太大，就会悬挂在表面上. 人们还会看到，筛网的细孔沾上一些液体、刷子的毛打湿了会粘在一起；龙头漏水会形成水滴，且扩大到一定尺寸后再掉下.



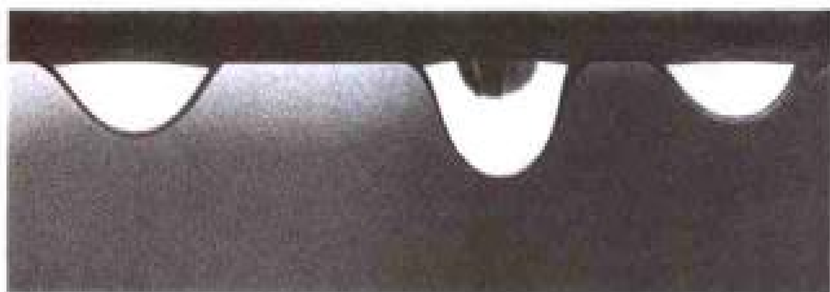
不同粗细的毛细管.

这些现象一般是这样解释的：想像液体表面覆盖一层弹性膜；并且，如果表面与其他物质接触，它就具有附着性或排斥性. 这里且限于说明液体表皮的弹性. 水滴表皮的弹性平衡了水滴的重量，正如橡皮膜与其上所载液体的情况一样. 对毛细现象作液体表皮解释，令人满意；因其概念上很简单，能凭依许多经验证明. 特别是或许尽人皆知的水虫之敏捷，它们能沿着池塘水面跑步，乃是在水的表皮上行走.

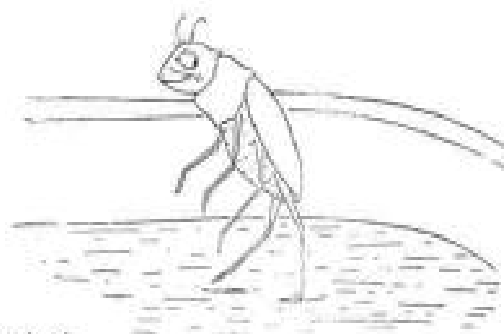
英国作家希莱尔·贝洛克（Hilaire Belloc）这样描绘水虫的特殊才干：

附着的液滴和悬挂的液滴.



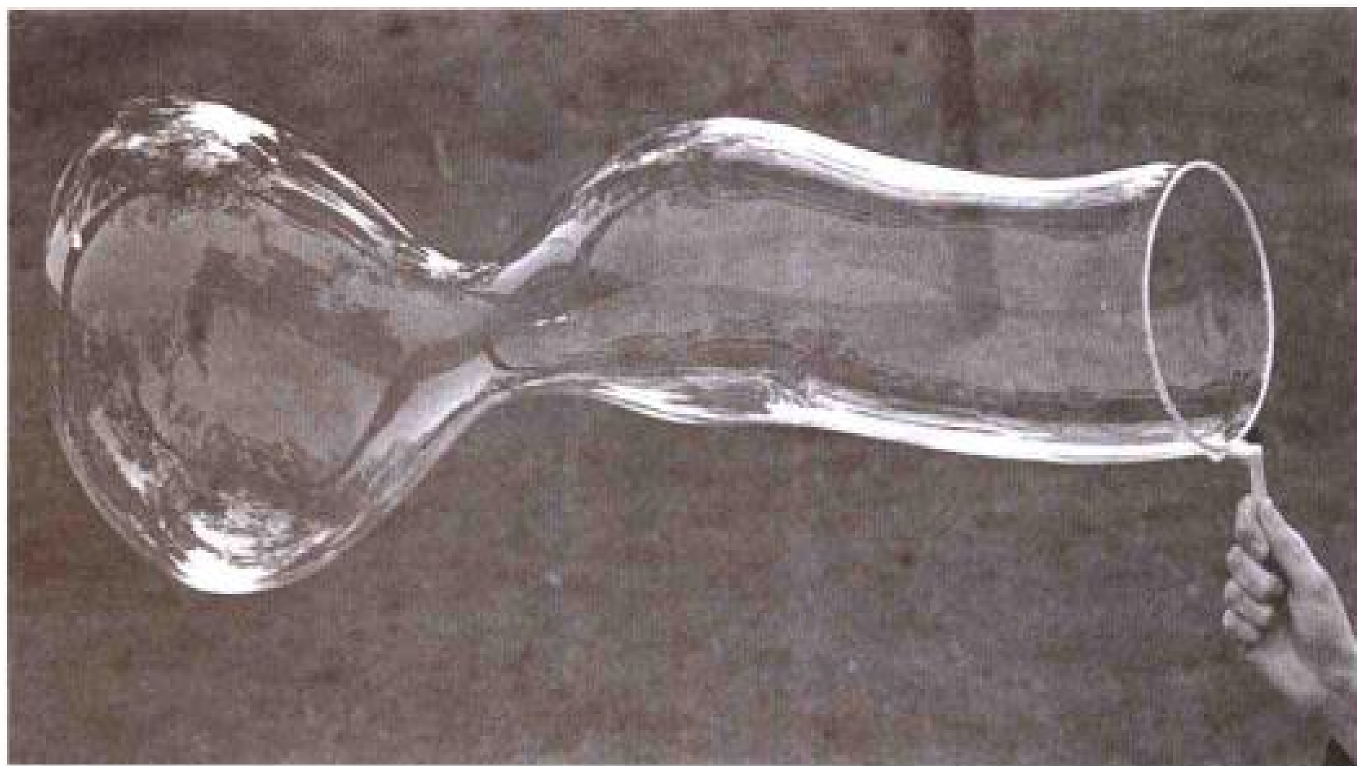


水虫的训导远胜于你的说教：
它在水面漫步，
　　显得那么轻盈、敏捷、悠闲逍遥，
它使人们的赛跑为之逊色，
　　又令你不由得目瞪口呆、犹感烦躁，
但它倘若永远不明白何故有此绝招，
　　或许就会沮丧、羞惭、十分懊恼.



水的表面张力与水中所含之矿物质的类型和数量有很大关系. 在世界的某些地方，矿泉水的表面张力如此之强，甚至可托起一个小的硬币. 表面张力甚大，你欲洗干净双手或衣服乃困难得多. 洗涤剂的主要功能便是使得用于洗涤机械的水的表面张力降低很多.

然而，用肥皂或其他洗涤剂减小表面张力，会形成肥皂膜，它或者由金属丝、丝线和曲面张成的框架所支持，或者没有边



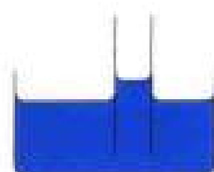
肥皂膜的皂液表皮.

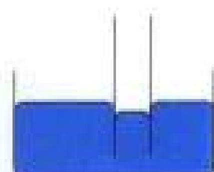
界、即形成为肥皂泡. 若肥皂减小了水的表面张力, 水液膜就不可能维持住, 而瞬即爆破.

用分子力的作用难于准确地解释表面张力. 并且, 必须计及另外一些现象, 例如遮蔽液面的蒸汽层. 但是, 凭藉表征具有极小势能的稳定平衡态的这个优美而简单的概念, 能很圆满地解释肥皂膜的行为. 因为液体表皮的行为在许多方面颇像橡皮膜, 被拉得越紧时所具有的势能越高. 就是说, 液体表面所储存的能量以某种方式与其面积相关联. 最简单的关系是势能正比于面积. 因此对于肥皂膜, 若其面积小于满足同样限制条件的任何其他表面的面积, 则它就处于稳定平衡态.

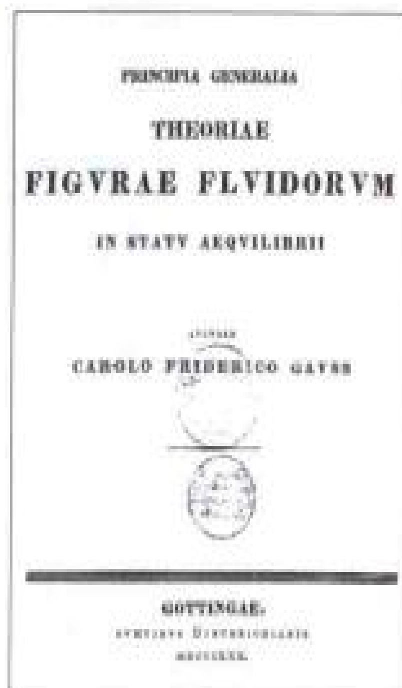
对于液滴, 其势能更为复杂, 取决于非束缚表面的面积的

乃是液滴的重力势以及边界对于液体的作用力势. 边界的作用力可以是曳引力，比如在玻璃和水之间；也可以是排斥力，比如在玻璃和水银之间. 这项基于约翰·伯努利的虚功原理的研究成果，被高斯用于他在1830年发表的论文“流体之平衡态理论的普遍原理”. 在这篇著作中高斯阐发了毛细理论，该理论是由托马斯·杨（Thomas Young）提出的[其论文《对于流体之附着力的一种分析》，载《皇家学会的哲学记录》第95卷（1805年），第65－87页]. 拉普拉斯（P. S. Laplace）在其著名的论著《天体力学》第10卷（1806年）的附录里也提到毛细理论. 高斯工作的重要性在于：人们现可用虚功原理、亦即用变分原理表征液体表面的平衡态；于是，毛细现象正可看作为这条有效原理成立的另一种情态. 肥皂膜只不过是毛细现象的一种特例，因此，可以应用伯努利原理，凭藉高斯创设的形式，将肥皂膜的平衡位置描述为这样的表面——对于给定的边界构型，假定在所有虚拟的（可能的）位置中它达到极小面积，或者至少是面积的稳定状态. 这样就已得出极小曲面理论；我们将在下一章展示其某些最有趣的特征.


（A）


（B）

毛细管的表面:（A）水;（B）水银. 表示容器壁施予水或水银上的分别是吸力和斥力.


PRINCIPIA GENERALIA

THEORIAE

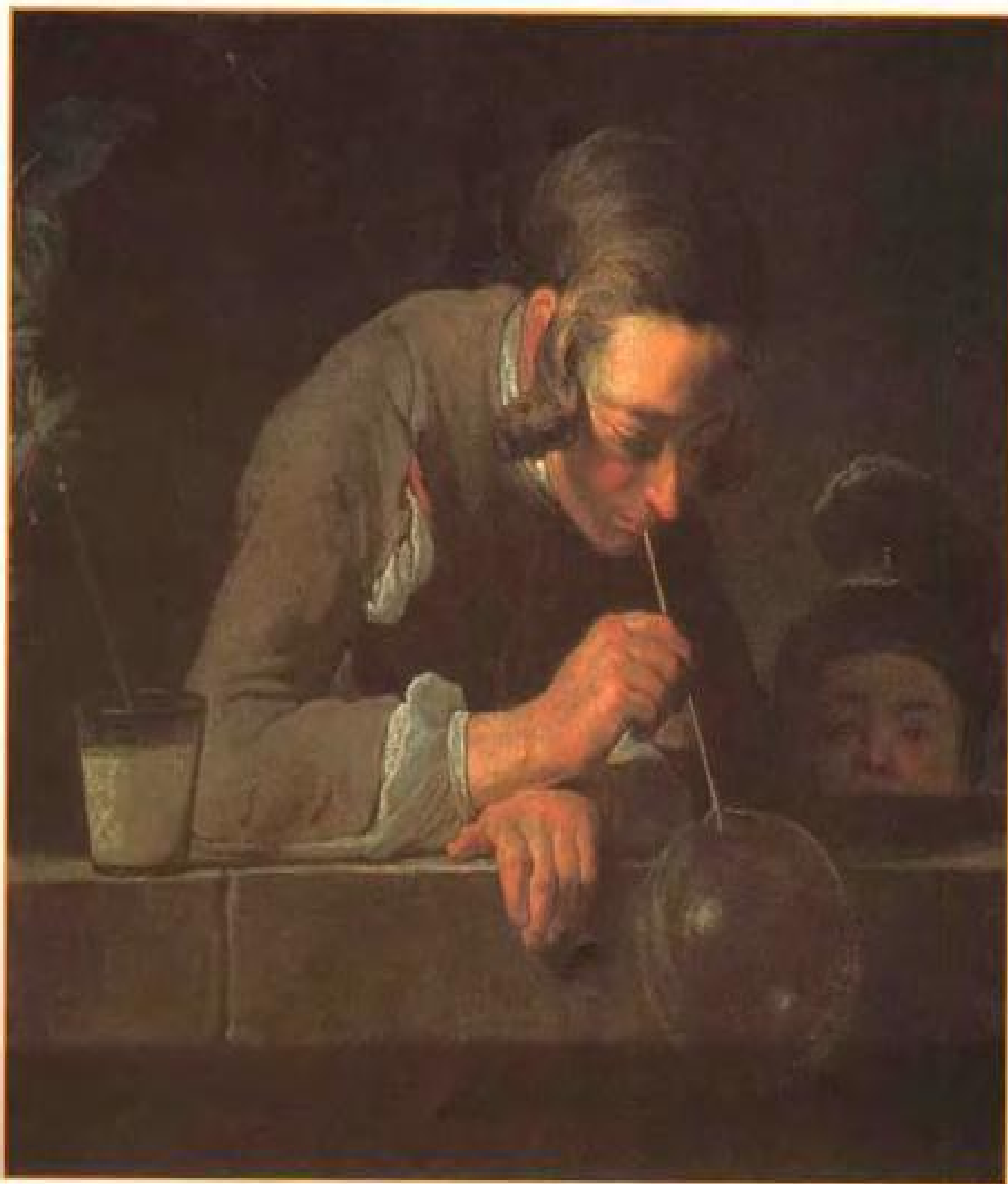
FIGVRAE FLVIDORVM

IN STATV AEQVILIBRII

CAROLO FRIDERICO GAVSS

GOTTINGAE.

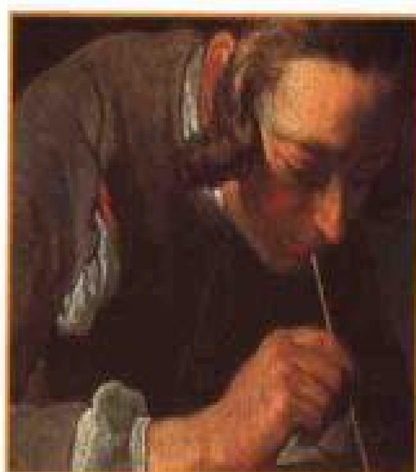
高斯论文（1830年）的卷首页.



吹肥皂泡的男孩．此画由法国画家让·巴蒂斯特·西梅翁·夏尔丹（Jean Baptiste Siméon Chardin，1698—1779年）绘制．藏于梅特罗波利坦艺术博物馆（纽约）．

5

肥皂膜：孩童和数学家的娱乐



这本关于自然界的书以几何学作表征而写成。

（伽里莱·伽利略）

我们大多数人都曾吹过肥皂泡，就如法国画家夏尔丹于1739年所作之油画中的男孩那样．且准备一些肥皂溶液，将一支麦秸浸入其中；吸一点肥皂水于秸内，然后便吹出一个个肥皂泡．

吹肥皂泡是一种古老的娱乐方式. 甚至一个藏于罗浮宫的古伊顿花瓶上也绘有吹肥皂泡的孩童画像. 而今可购得特制的泡沫溶液,并附有一个连带手柄的简单的金属丝架或塑胶架子. 把这种架子浸入此溶液, 然后沾起一点, 类似圆盘形状的肥皂膜就形成了; 向架子吹气, 就产生肥皂泡. 如果用细的易弯曲的金属丝做成更复杂的几何形状的架子以替代圆形架子, 则会出现具有奇怪、有趣形态的美妙肥皂膜. 由于光具有波动性, 肥皂膜会即刻呈现因干涉效应而导致的彩虹色; 但瞬息之后因膜实在太薄, 七彩色便看不到了.

肥皂膜和极小曲面：普拉蒂奥问题

肥皂膜实验中出现的诱人薄膜, 显然处于稳定平衡状态; 那么, 按照约翰·伯努利的虚功原理, 必定称其为*极小势能膜*, 它乃跨在金属丝架子上面形成.

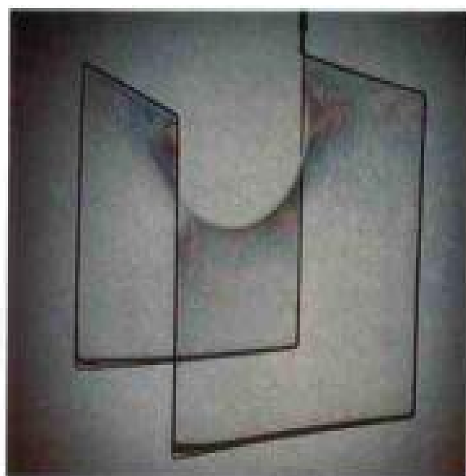
结果, 因势能正比于面积, 由肥皂膜造型的*数学曲面*是面积最小的曲面; 或者如数学家的说法, 乃是极小曲面. 极小曲面的面积比跨在同一架子上面形成的任何邻近曲面的面积都小. 肥皂膜及其数学模型的奇异形状直观可见, 而且是颇有功效的极小原理的十分引人注目的实例.

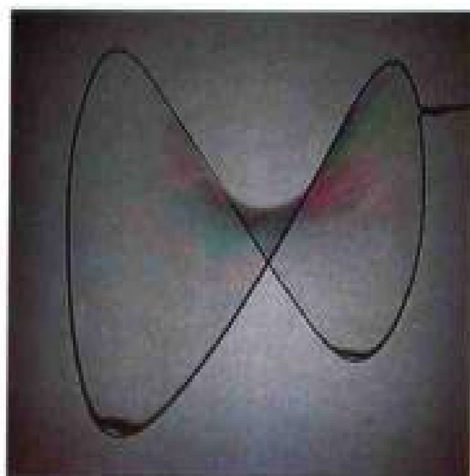
数学家们受极小曲面的吸引, 由其提出了有趣而富有挑战性的问题. 正是欧拉的继承人、去腓特烈大帝宫廷的拉格朗日, 他于1760年导出了*极小曲面方程*; 这在下文予以说明.



约瑟夫·安托恩·费迪南德·普拉蒂奥(Joseph Antoine Ferdinand Plateau, 1801—1883年).

比利时物理学家J·A·F·普拉蒂奥的关于毛细现象的出色的实验工作和理论工作中, 对于液膜的漂亮实验激发了数学家们的兴趣. 1873年, 普拉蒂奥在其主要著作——论文“关于仅受分子力支配的液体的实验静力学和理论静力学”中发表了他





框架上的肥皂膜.

的大部分观察测量和理论研究的成果.

普拉蒂奥没有看到他的许多实验；他在1843年失明了. 因为他在一个生理光学实验中凝视太阳25秒钟以上而没有保护眼睛. 在后来的岁月里，当他想做研究工作时就必须依靠家人和助手的帮助.

普拉蒂奥的一项观察成果对于数学特别重要. 通过一些实验，比如将各种金属丝环绕成的围线浸入肥皂溶液，并移动它们，他意识到由单个闭合金属丝组成的所有围线，不论其几何形状如何（只要不太大），都至少蒙上一层肥皂膜. 对于肥皂膜的这个数学模型，即其面积可能为最小的数学曲面，亦即极小曲面，相应之陈述是否成立？换言之，每条闭合的空间曲线可以至少由一个极小曲面张成，这正确吗？此数学问题即谓之*普拉蒂奥问题*而闻名. 19世纪和20世纪的杰出数学家对这个问题产生好奇，但求得其解答显然是非常困难的.

虽然由肥皂膜直接得出相应之物理问题的解答，但数学家还是不遗余力地证明此数学问题之解的存在性. 对于某些读者，



理查德·库朗(1888—1972年)和他的研究生查尔斯·德普里玛(Charles De Prima).

这似乎析理过细；然而如理查德·库朗——20世纪的一位研究极小曲面的著名学者已作过评论：

> 经验证据终究不可能确认数学上的存在性——数学上的存在性要求不可能作为无用的严密性而被物理学家拒绝，唯有数学的存在性证明才能保证对物理现象的数学描述是有意义的.

让我们考虑一个例子以说明他的论点. 克里斯田·哥德巴赫(Christian Goldbach，1690—1764年)已经注意到，大于4的

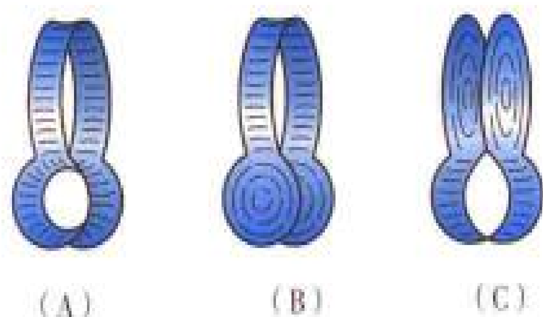
偶数看来像是两个奇素数的和（按数学上的惯例，1不是素数，2是素数，当然是唯一的一个偶素数）：

$6=3+3$；	$16=3+13$；	$26=13+13$；
$8=5+3$；	$18=7+11$；	$28=5+23$；
$10=5+5$；	$20=7+13$；	$30=7+23$；
$12=7+5$；	$22=11+11$；	$32=3+29$；
$14=7+7$；	$24=5+19$；	$34=17+17$；

哥德巴赫在1742年写给欧拉的信中问他能否证明上述结论在偶数持续增大以至无穷时的正确性．欧拉始终不能．迄今为止仍无别人做得到．目前最快的计算机能够验证哥德巴赫的猜测对于很大的偶数都成立，但显然不能证明对于所有偶数均此，因为有无限多个偶数．如果对一切偶数都试遍，就需进行无限多次检验．

上述例子说明了物理实验总不能确证数学论断的很好理由．为证明一个论断，不在于做了多少个实验；我们总不能排除或许由另外一个重复的实验得出不同结果的可能性．因此，用经验证据终究不能确认一个数学结论．恰恰对于物理学家来说，得到严格的数学存在性证明是重要的；因为只有如此，才能毫不怀疑：物理事例的数学模型至少在某些方面是正确的．凭借肥皂膜的数学模型，必然以曲线代表金属丝，以曲面代表肥皂膜．曲线和曲面是已被理想化了的，正如古希腊人之所为；我们在第3章中已经表明这一点．

对于哥德巴赫猜测的上述理由同样适用于普拉蒂奥问题．显见，这个物理问题总是有解答；因为每一次把金属丝围线浸入肥皂水，使沾上一点，则就形成肥皂膜．但从这个物理证据并不能得出结论：每个闭合围线均由其面积为最小的曲



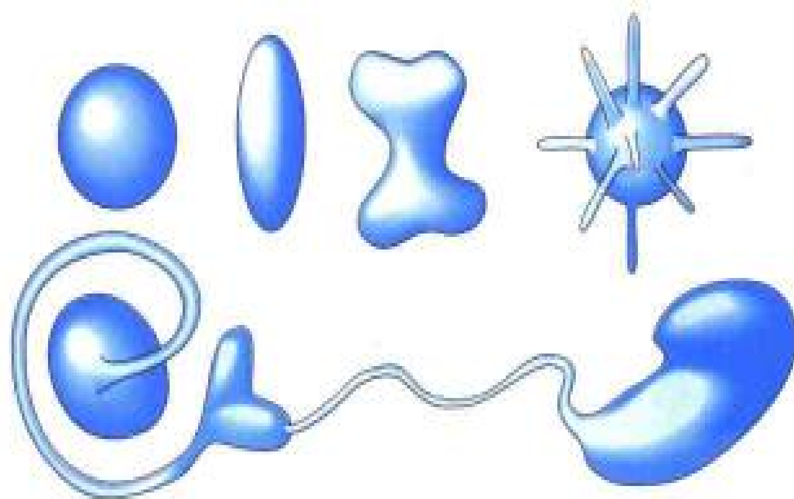
可能至少由三种不同的极小曲面张成的闭合曲线.

面张成.

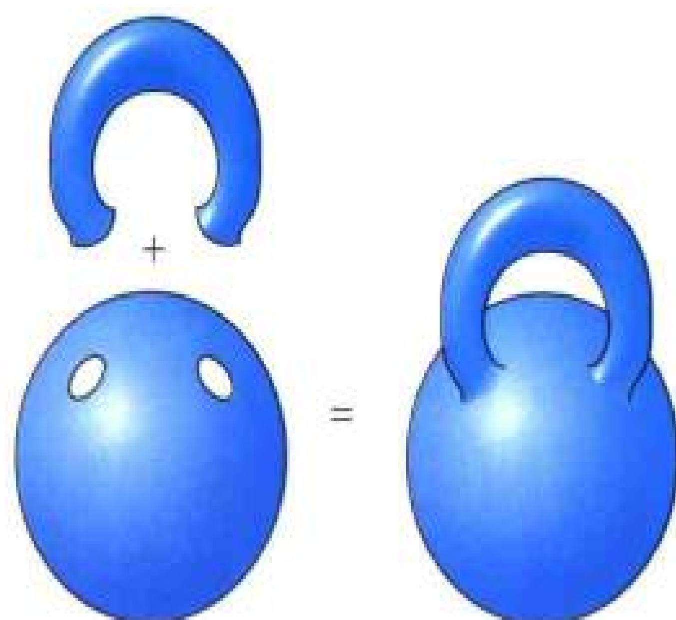
普拉蒂奥问题的解可能为多种不同型式. 为了明白会出现怎样的情况, 我们考虑一条特殊的闭合曲线, 它可能至少由三种不同的极小曲面张成. 如左图所示, 中间和右边的曲面是同一型式的, 而左边的型式不同. 数学家说, 左边曲面的亏格为1, 另两种曲面的亏格为0; 此为何意?

为了解答普拉蒂奥问题, 须知如何可能使一个由曲面及其张成的围线复杂一些. 所以, 我们需要将曲面分类的方法, 藉以在这些曲面内可找到问题的解. 藉助一种粗糙而有用的分类方法以区分不同的拓扑型. 两个曲面属于相同拓扑型, 乃指如果能通过拉伸由一个变形为另一个, 宛若橡皮膜一般; 允许曲面的不同部分相互穿越, 但并无任何撕裂、切割或粘贴. 下图表示一些曲面的拓扑型与球面相同.

且从球面上割去两圆块, 再接上一个柄 (见下一页的上图所示). 可继续这样的操作: 在球面上接上两个、三个或更多个



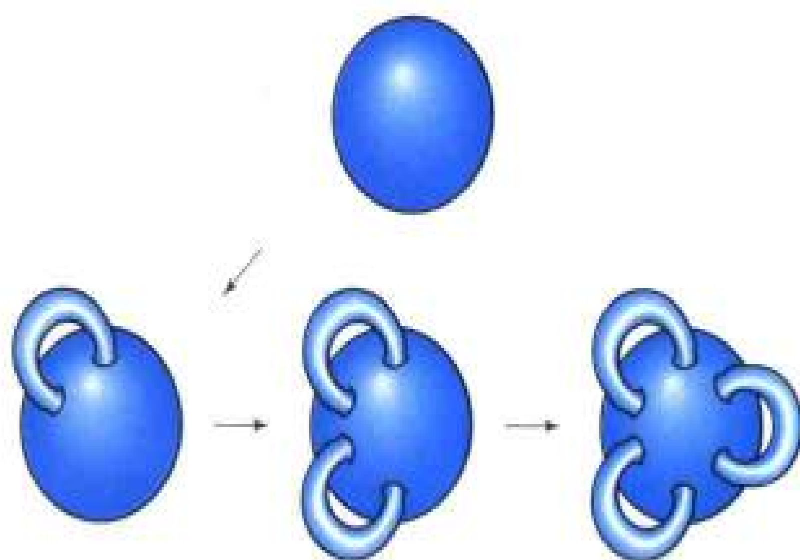
其拓扑型与球面相同的闭合曲面.



一个球面与一个柄相接.

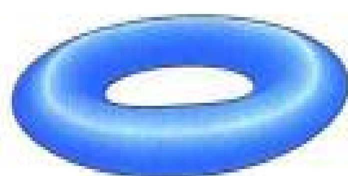
柄. 如此就得到若干无边界的有限曲面的集合；这些曲面被称作柄－体曲面，彼此很不一样. 如果两个这样的曲面所接柄的数目不同，它们的拓扑型就相异（见下图）.

且看：带有一个柄的球面被拉伸并压扁，变成圆环面，即



不接柄和接上一个、两个、三个柄的球面.

亏格为1的曲面（圆环面）、亏格为2的曲面（双圈面）以及面包店的双圈饼.



圆环面：$g=1$



双圈面：$g=2$



面包店的双圈饼

如面包圈的表面；再则，带有两个柄的球面，其型式与双圈饼的表面相同．请注意，上图所示之面包店的双圈饼与带有两个柄的球面属于相同的拓扑型.

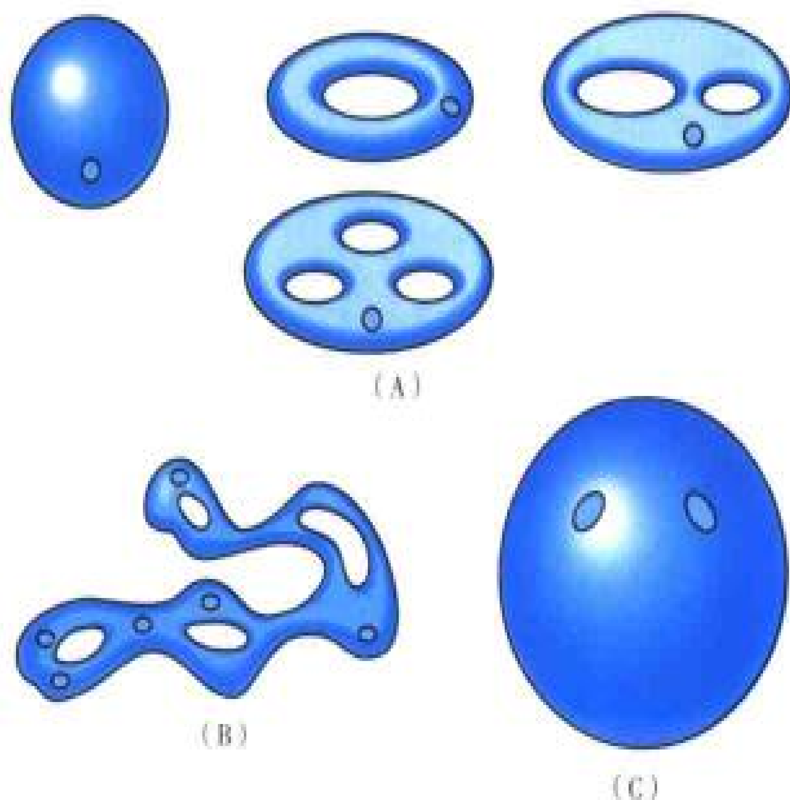
一曲面，所谓其亏格为g，乃指与接上g个柄的球面的拓扑型相同者．因此，圆环面的亏格为1，而双圈饼的亏格为2.

至今考虑的曲面都没有任何边界，亦即当我们绕着曲面行走，始终不会走到边缘上．例如在球面上、在圆环面或双圈面上，总不会遇到边缘，所以说它们都是无边界曲面．反之，平面上的圆内，即圆盘（面），是以圆为边界的曲面．另一个例子乃由球面或圆环面提供：在面上切割成一个或几个孔，即移去一些类似圆盘的小曲面．我们可以切割成若干个孔，譬如说m个孔，就有m条曲线C_1，C_2，⋯，C_m为其边界．如果两个曲面具

有相同的亏格和同样数目的孔洞，二者的拓扑型就相同. 说得更明确些，对于亏格为 g 的曲面上的 m 个孔若用 m 个类似圆盘样的曲面填补之，就得到无边界曲面，又为接上 g 个手柄的球面型式. 可以称这种物体为亏格为 g，并带有 m 个孔的柄－体曲面.

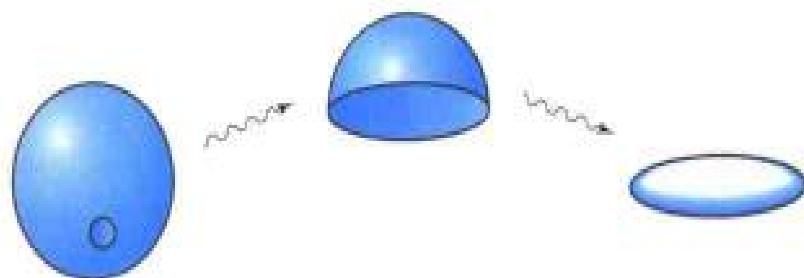
且考虑只有一个孔的一些曲面，原则上它们与普拉蒂奥问题的解的拓扑型相同. 的确，相同的曲线完全可能是不同拓扑型的极小曲面的边界. 例如，第150页的边图里的曲面B和C的 $g=0$，$m=1$，而曲面A的 $g=1$，$m=1$.

我们注意到带有一个孔的球面（其 $g=0$，$m=1$）与圆盘有相同的型式（见下一页的上图）；圆盘是可能的最简曲面，其边界即为简单的闭合曲线. 这里，在给定围线之内的所有圆盘型极小曲面偶尔是普拉蒂奥问题之最简单的解.



（A）都有一个孔、但亏格不同的一些曲面；（B）有6个孔、亏格为4的曲面；（C）有两个孔的球面.

带有一个孔的球面可变形为圆盘.



圆盘型极小曲面的面积可能比任何邻近曲面，或实际上是比其他任何圆盘曲面的面积都小；但可能有一个亏格较大、面积较小的曲面. 换言之，圆盘型极小曲面可以不是张成预先指定的曲线、并具有最小面积的曲面，而可能仅仅保证局域面积为极小. 第150页的边图所示即是这种现象之一例（为使人信服起见，我们必须将此曲线的两对邻近的类圆线部分挤压得很接近）.

因此，对于给定的曲线C，g为多大才会使张成C的曲面具有绝对最小的面积，这并不清楚；甚至不明白，对于不论其g为多大的任意曲面，其面积是否达到极小. 例如考虑一条“病态曲线”，见下一页的图a所示. 凭藉一个貌似“连锁形怪物”（见图b）的曲面，便得到绝对的最小面积. 此怪物曲面的拓扑型与只带有一个孔，但接上无限多手柄的球面相同. 所以，就拓扑而言，它即为一个附带无限多手柄的圆盘（见图c）.

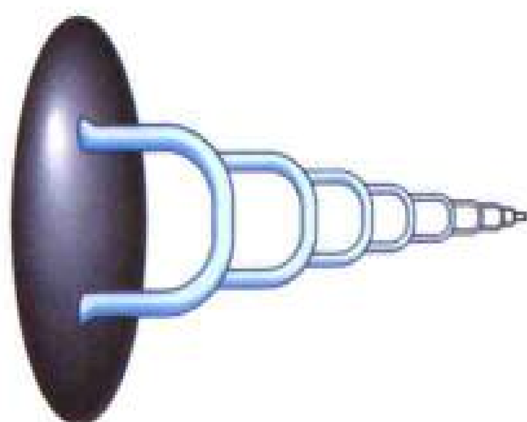
之所以提及此怪诞的例子，是出于对其围线的考虑. 这围线有一个奇异点：怪物的尾端非常尖. 倘若我们只允许“常规”的光滑曲线作为可能的围线，那么这样令人讨厌的、亏格为无限大的曲面是否可能表现为普拉蒂奥问题的解？事实上目前对这一点已予证明.



（a）连锁形怪物的边界.



（b）连锁形怪物.

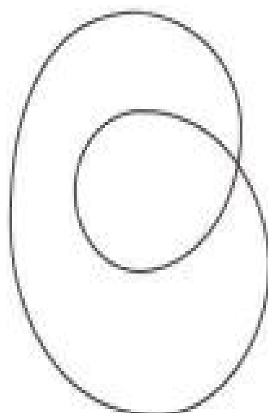


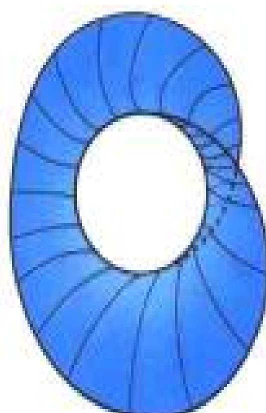
（c）附带无限多手柄的圆盘.

极小曲面还有其他东西使我们惊奇吗？譬如说，我们期望在柄-体曲面集合中找到能张成给定围线的所有可能的肥皂膜，或许就必须扩展这个集合.

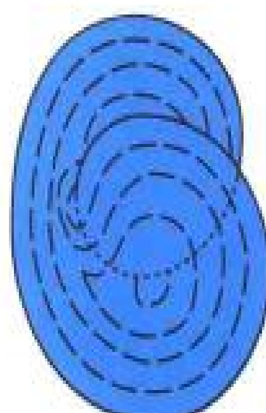
且看下一页的上图里的曲线. 该曲线由两个不同拓扑型的曲面所张成. 如果金属丝形如下一页的左下图所示，那么由其围成的面积最小的曲面与上图中的曲面A相似. 可是，曲面A不属于上述具有 m 个孔、亏格为 g 的柄-体曲面集合；因为此集合里的所有曲面都是双侧的，而A是单侧的.

张成一闭合曲线的两个极小曲面.





曲面 A:
麦比乌斯带

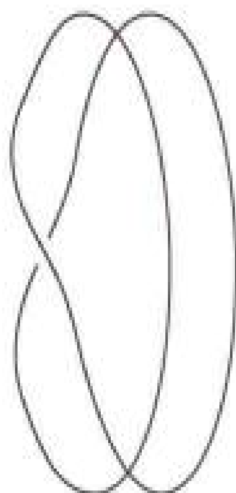


曲面 B:
圆盘

"双侧"实际指有两个侧面，如同曲面 B. 小动物在这样的曲面上行走，若不越过边界，就总不可能从一个侧面走到另一个侧面；而在单侧曲面上行走，无需越过边界就能走到曲面上的任何哪一点.

曲面 A 的拓扑型就如同著名的麦比乌斯带. 此带由德国数学家、天文学家、莱比锡大学教授奥古斯特·费迪南德·麦比乌斯（August Ferdinand Mobius）发现. 这种带可以这样得到：裁出一条长纸带，将其扭曲，然后将两端粘在一起. 读者或可亲手制作一下，或可看看由荷兰艺术家 M·C·埃舍尔（M.C.Escher）于 1968 年所作的蚀刻画（见下一页的上图）.

发现麦比乌斯带以后，数学家们又找到了一个由具有不同拓扑型的有限单侧曲面组成的很大的集合，这些曲面或者没有孔，或者带有一个、两个或更多个孔. 然而许多曲面必定有自交叉线，比如克莱因瓶，乃以德国数学家费利克斯·克莱因（Felix Klein，1849—1925 年）的姓氏命名. 这些曲面被称作不可定向曲面，因为我们不能区分这样的曲面（见第158页的上图和左图）上的顺时针转动和逆时针转动. 而上述的柄－体曲面集则是可定向有限曲面的集合.



张成此曲线、面积最小的曲面具有麦比乌斯带的拓扑型.

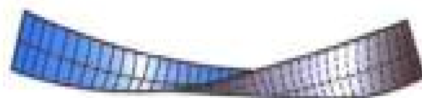


麦比乌斯带（由M·C·埃舍尔所作）.



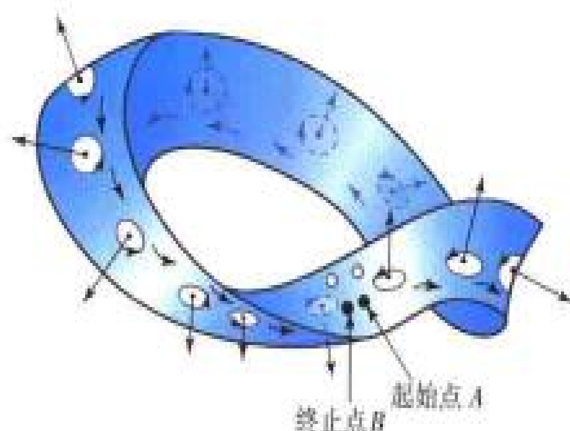
奥古斯特·费迪南德·麦比乌斯（1790—1868年）



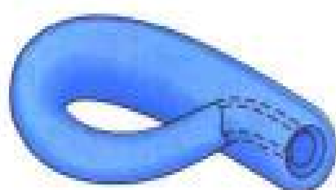




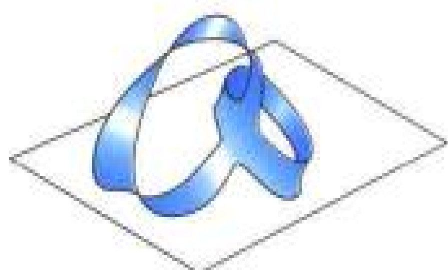
制作麦比乌斯带.



沿着麦比乌斯带走完一圈,顺时针方向的转动变成逆时针方向的转动.



克莱因瓶只有一个侧面: 其内侧面与外侧面同一.



张成一闭合曲线,其亏格为1的不可定向曲面.

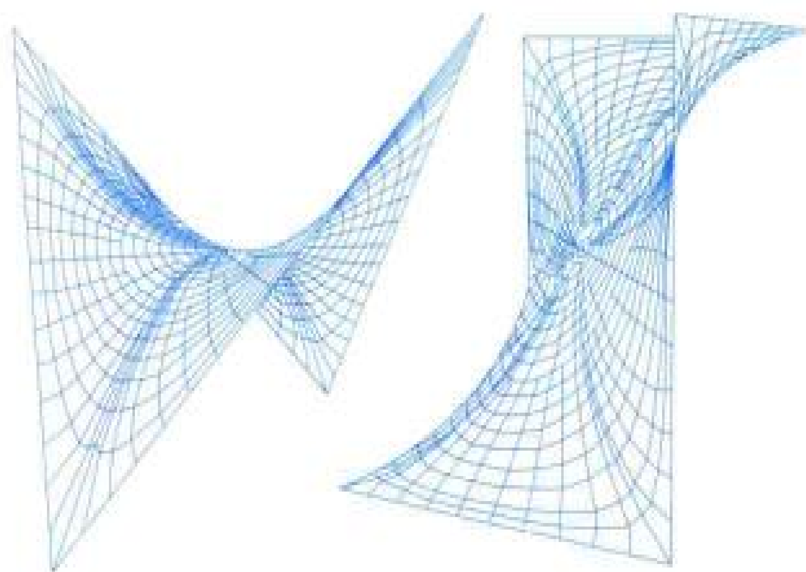


张成一闭合曲线,其亏格为2的不可定向曲面.

最后, 让我们考虑两个单侧极小曲面, 它们的拓扑型比麦比乌斯带更复杂一些. 左图表明, 普拉蒂奥问题的势能解的拓扑型还甚不明晰. 但是已经看出, 圆盘型曲面属于能张成一闭合曲线的最简曲面之列. 因此, 我们提出如下问题:

能否证明: 在一类张成一条给定的简单闭合曲线的圆盘型曲面中至少存在一个其面积为极小的圆盘型曲面? (所谓简单曲线, 乃指无自交叉点的曲线, 例如圆周线, 而不像8字形线.)

19世纪, 对于许多特殊曲线, 其中大部分是多边形, 其普拉蒂奥问题已被求得圆盘型解, 并找到了许多特殊的极小曲面. 诸如黎曼、外尔斯特拉斯、施瓦茨等数学家的成就都是第一流的; 尽管如此, 他们可利用的方法还不足以普遍地解决普拉蒂奥问题. 1914年, 法国几何学家加斯顿·达布(Gaston Darboux, 1842—1917年)评论道:



关于多边形的普拉蒂奥问题的两个施瓦茨解，由计算机画成。

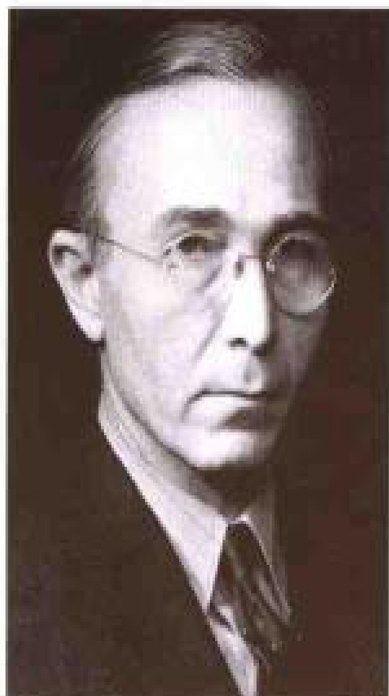
迄今为止，数学分析还未能发明使我们去着手研究这个美妙课题的任何方法。

1928年，年轻的美国数学家杰西·道格拉斯得出了普拉蒂奥问题的圆盘型解．同年，他在德国的哥廷根大学作了关于他的解的演讲；当时，哥廷根是世界上科学和数学的主要中心之一．看来，道格拉斯的见解并非完全令人信服，听众对他的证明的完备性有怀疑．这促使道格拉斯花了两年时间补充其证明的细节；他的这些工作直至1931年才发表．与此几乎同时，匈牙利数学家蒂博·拉多（Tibor Radó）导出的全然不同的证明亦已经发表了．



杰西·道格拉斯（Jesse Douglas，1897—1965年）．

在后来的十年间，道格拉斯解出了许多其他极小曲面问题．他的一些有效方法使其得以证明在一定条件下存在张成一条或甚至有限多条闭合曲线的、亏格较大的极小曲面．他因其所取得的成就，于1936年获得首次颁发的两个菲尔兹数学奖中的一个（数学学科无诺贝尔奖，菲尔兹奖是国际数学会议议定的最



蒂博·拉多(1895—1965年).

高奖).

道格拉斯和拉多都未终止对极小曲面的研究工作. 读者将看到, 此后又得到许多别的漂亮成果. 一项最重要的成就是解决了广义普拉蒂奥问题. 现在已经证明: 对于每一条简单曲线, 存在张成此围线, 具有最小面积和有限亏格的一个曲面; 并且, 这个面积最小的曲面没有自交叉线. 由此可以推知, 对于闭合的"打结"曲线, 具有最小面积的曲面不可能是圆盘面; 因为假如是圆盘面, 则便可证明并无此结, 然而对于闭合打结曲线来说这是不可能的, 所以为摆脱这两难困境, 唯有认为该曲线原本并不打结.

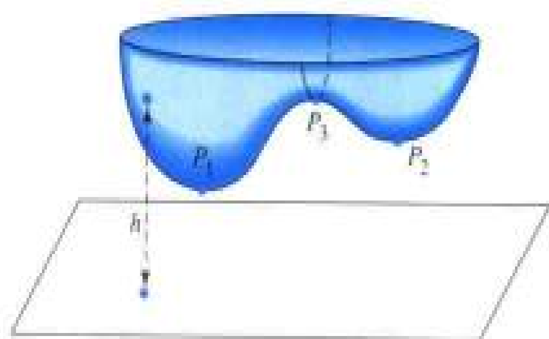
极小曲面的几何描述

在上一节里, 对于面积极小的曲面, 亦即对于稳定肥皂膜的数学模型, 我们使用术语"极小曲面". 就这样的肥皂膜而言, 其"表面张力"的势能为局域极小.

读者已经明白, 一条给定曲线可以是不止一个"稳定"的极小曲面的边界, 那么自然会问是否存在张成一给定围线, 并对应于势能的非稳平衡态的曲面? 在由势能的不同, 亦即由面积不同而形成的数学意义的山区里, 这些极小曲面对应于山区的谷点(诸如下一页图中的点 P_1, P_2).

但在此山区里还有另外的点 P_3, 该点处虽然有水平切平面, 然而它并非局域极小值点. 正如第4章已经讨论过的, 这样的点也称为平衡点, 但它们是非稳平衡点, 而诸如 P_1 和 P_2 的极小值点乃是稳定平衡点.

用一力学类比——一个硬质畸形碗, 或许也可能说明这种

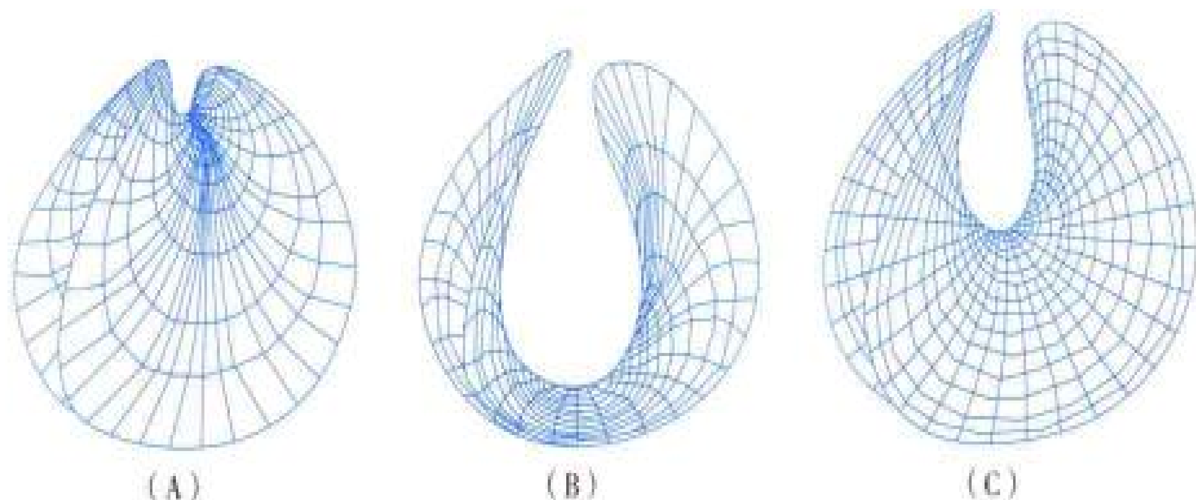


畸形碗.

情况. 我们且对上图予以解释. 这里有两个极小值点 P_1、P_2, 此乃对于超出固定平面的高度 h 而言; 此外还有非稳平衡点 P_3. 取小球置于 P_1、P_2 或 P_3, 小球静止; 倘若稍稍推动小球, 小球总是离开非稳位置 P_3, 而绕着稳定位置 P_1 或 P_2 作振动.

设一闭合围线可能由两个具有局域极小面积的不同的圆盘曲面张成. 然后我们可以问: 是否有第三个曲面, 导致一个区域的非稳平衡点, 或许这就对应于 P_3 点——这个非稳平衡位置. 若有, 那么可能发现描述一个区域的稳定平衡点和非稳平衡点二者的几何条件吗? 回答是肯定的. 一个区域里存在两个极小值, 的确就要求在此区域里存在一个乃是非稳平衡的圆盘曲面. 但不可能看到这种曲面相应之肥皂膜, 因为它是非稳的, 是瞬息即逝的幻影, 只呈现几分之一秒. 下一页的图 C 表示假想的肥皂膜.

同样, 如何能用公式表达由以表征所有的平衡曲面（稳定的和非稳的）的条件? 接下去, 我们开始讨论曲线的曲率. 人人皆知: 直线不曲; 确实, 这是同义反复. 如果要问直线之曲率的数值, 当然, 其答案为零. 然而, 其他曲线的情况怎样? 它们是如何弯曲的?



（A） （B） （C）

由计算机画出的图：（A）和（B）是稳定极小曲面；（C）是“恩尼珀曲面”，对于所选择的边界曲线，这是一个非稳平衡曲面——表示一假想的肥皂膜.

为了回答这个问题，我们首先来考查半径为r的圆. 在圆周的每一点，其弯曲程度是相同的. 若r甚小，圆则甚曲. 随着r增大，圆愈来愈大，则弯曲得愈来愈小. 人们或许喜欢一个曲率定义，以反映这个简单的观测事实. 于是以如下规则定义圆的曲率κ：

$$\kappa=\frac{1}{r} \text{ 或 } \text{曲率}=\frac{1}{\text{半径}},$$

那么，r越大，曲率κ就越小.

于是，我们是否再来研究更复杂的平面曲线，譬如下一页下图的（A）？显见，这条曲线在某些地方很弯曲，而在其他地方完全不曲. 倘以一个数量来标定曲率，当沿曲线从一点移到另一点，此数量就改变. 且设有一任意曲线C（或者是平面曲线，或者不是平面曲线），曲线上并有一点P［见下一页的下图的（B）］.

如果曲线是光滑的，则或许有一切线与该曲线相切于P点；

那么可以表明：有一圆通过P点，它与曲线C在此点有相同的切线，并切合得最好. 对这个圆作精确定义需要微积分，但我们可以对它给出一个粗略的概念. 选定靠近P点的两点P_1和P_2，则三点P_1、P_2和P便一般地确定一个圆. 当P_1、P_2挤向P时，通过此三点的圆就越来越接近于切合得最好的那个圆. 如果此圆的半径为r，那么曲线C在P点的曲率κ就定义为$1/r$. 为清楚起见，我们还对所谓曲面的正截口这一特定曲线给定其曲率的正负记号. 就是说，按下面描述的惯例，把正截口的曲率κ定义为$1/r$或$-1/r$.

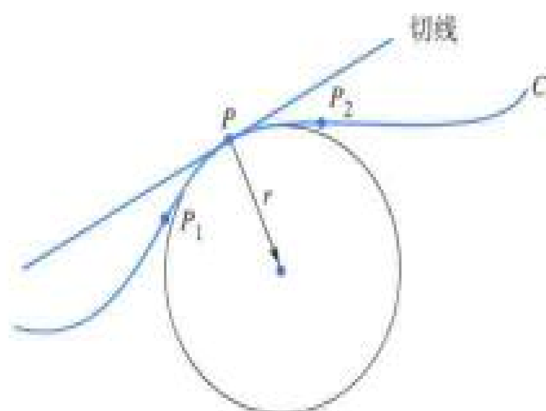
首先要问：何谓正截口？设S是一个任意曲面，如左上



圆的半径逐渐增大.

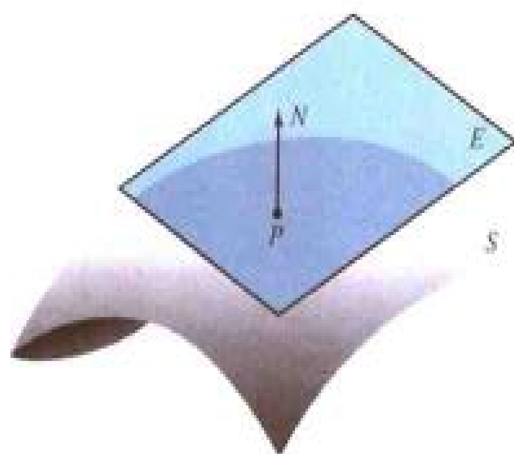


(A)

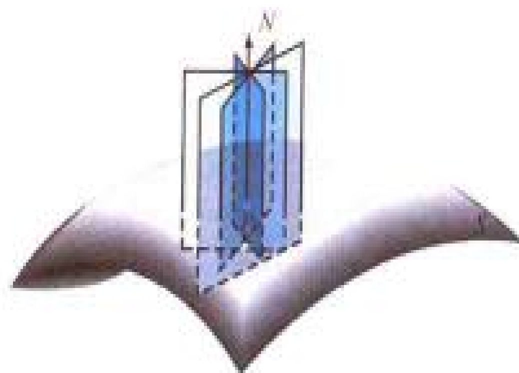


(B)

(A) 一般曲线.
(B) 曲率半径.



曲面S，切平面E，点P和法线方向N.

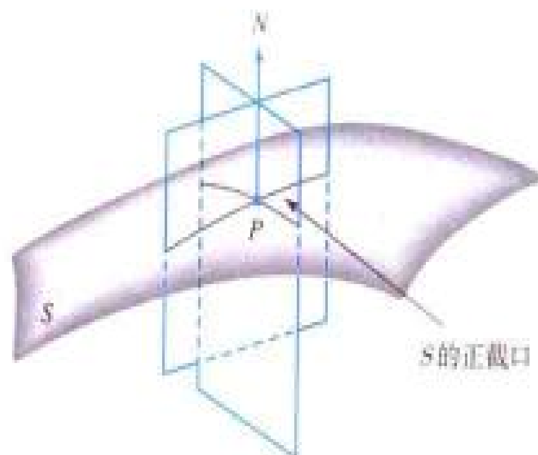


P点处的法平面簇由法线方向N确定.

图所示．在这曲面上确定一点P，而后选定一个垂直于切平面E的方向N，E与S只在P点相接触．此垂直方向称为曲面S在P点的法线方向．可以把曲面法向N想像成一个箭头，其箭尾固定在P点（在正则曲面的每一点都有两个法向箭头，二者指向相反）.

经过P点、并包含法向N的平面（如下图所示）称为曲面在P点的法平面．显然，在P点可能有无限多个法平面．可以通过围绕由法向N确定的轴线而旋转任何一个法平面，便得到所

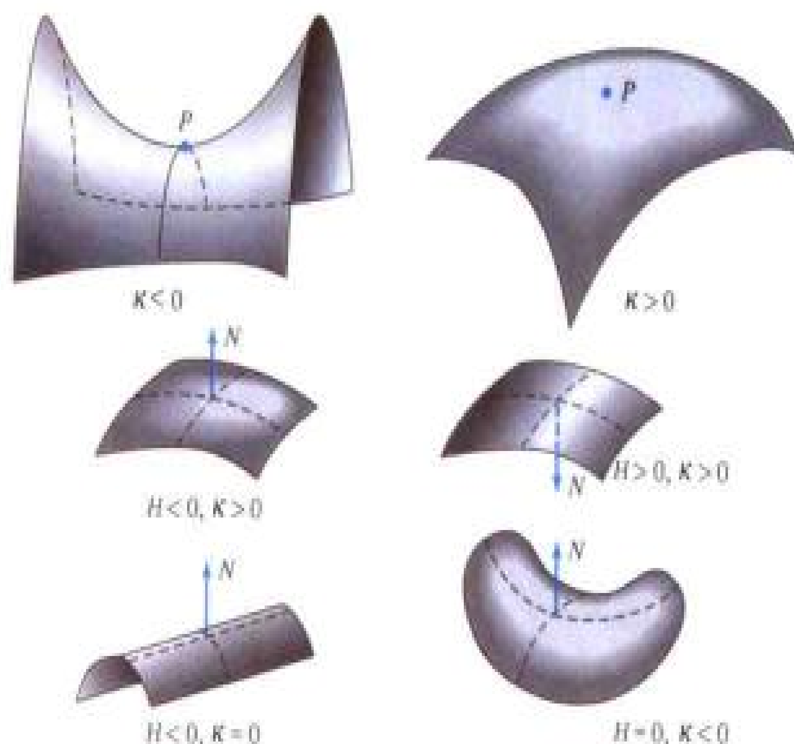
两个法平面及其正截口.



有的法平面.

曲面S与其在P点的每个法平面都截交于一条平面曲线，此曲线称为S的正截口．且看曲面在P点的正截口C（见上一页的下图），令r为P点处切合最好的圆的半径．此圆与正截口C在同一个平面里，圆心在包含"法向箭头"N的直线上．N从P点出发，或者指向最佳切合圆的中心，或者指向相反．如果指向圆心，就把正截口在P点的曲率定义为$1/r$；如果指向相反，则定义为$-1/r$．所以κ的正负取决于法向N的选取．κ为负，表明正截口弯离N箭头；κ为正，表明正截口弯向N箭头．结果，这个记号不仅对于P点的正截口之弯曲程度的数值表示，而且对于其弯曲方向的形式描述，都带来方便.

下一步，主要就是确定曲面曲率的度量．如今几何学家所



曲率不同的曲面．记号κ有几何意义；而记号H只取决于对N的选取，与曲面的形状无关.

采用曲率的两种度量形式是高斯曲率和平均曲率.

可以证明：在通过曲面上给定点P的所有正截口里，有两个特殊的截口 C_1 和 C_2，二者在P点的曲率分别为 κ_1 和 κ_2，κ_1 是可能有的正截口在该点的曲率中的最大值，κ_2 是其最小值.

且把曲面在P点的*高斯曲率* κ 定义为这两个主曲率 κ_1 和 κ_2 的乘积：

$$\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2;$$

而把*平均曲率* H 定义为主曲率 κ_1 和 κ_2 的算术平均值：

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

于是，我们便能讨论拉格朗日的关于极小曲面方程的定理[1]了．该定理给出所寻找的其面积为最小的曲面的几何特征：

> *面积为极小的曲面在每个正则点的平均曲率必定为零.*

亦即，面积为极小的曲面满足方程

$$H = 0.$$

曲面在其正则点的邻域里是光滑的，并看来像稍有畸变的圆

[1] 这里说明的定理由默尼耶(Meusnier)——一位微分几何学家在其论文"关于曲面之曲率的报告"中发展了，该文于1776年在法国科学院宣读，继而在1785年发表.

盘.）

对此方程还有另外的物理解释. 可以把肥皂膜在任意一点的两侧间的压力差 p 与此膜的平均曲率用拉普拉斯方程关联起来：

$$p = TH,$$

其中，T标记液体的表面张力. 这同一个方程还把两种液体（或一种液体和一种气体）的交界面的平均曲率与二者之间的压力差关联起来.

因此，说平均曲率为零，以及说极小曲面的两侧有相同的压力，这两种说法是相当的.（但是发现，肥皂泡内部的压力高于外部；所以，肥皂泡膜是一种其平均曲率 H 为非零常数的曲面.）

原来，凡面积取值处于非稳平衡态的曲面，其平均曲率必然同样为零. 因此，习惯上把术语"极小曲面"用于其平均曲率为零的一切曲面，不管曲面的面积是否达到极小值. 这就是我们接着要探讨的问题.

从此开始，我们把其面积（亦即其势能）为极小的曲面看作稳定极小曲面；而术语"极小曲面"乃指其平均曲率为零的曲面. 稳定极小曲面对应于肥皂膜的一些就表面张力的势能而言是平稳的状态.

原则上，稳定极小曲面是那些可能由肥皂膜显示的曲面. 然而，非稳极小曲面——短暂的幻影——也是有趣而重要的，尽管它们并无可能产生所对应的肥皂膜. 首先，这样的曲面作为

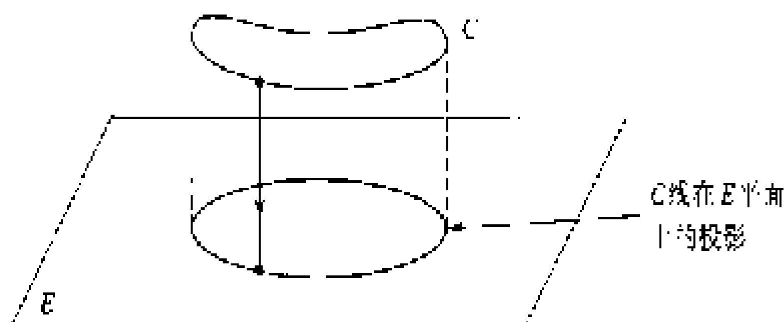
由一种漂亮的几何条件确定的数学实体而使数学家颇感兴趣. 其次，这样的曲面必然使人们得以理解极小曲面在其边界围线受到干扰时的行状如何.

极小曲面看来像什么东西? 倘若一曲面在每一点的平均曲率均为零，那么该曲面在各点或者弯离、或者弯向给定的垂直方向. 也就是说，极小曲面要么是平面、要么好像是马鞍面.

多少个极小曲面能张成一条确定的围线?

我们可能自然地产生一个问题：对于一条给定的围线，有多少曲面能以它为边界? 遗憾的是，几乎没有人知道，甚至限于甚为简单的情况，诸如有多少圆盘型曲面能张成一个闭合的圈? 第150页的左上图表示，肯定有一些围线，可能由不止一个圆盘型极小曲面张成，但也有一些围线，只有一个这样的曲面以其为边界.

第一个答案早为人知：对于平面曲线，只有一个极小曲面，即平面图形以其为边界. 第二个结论由蒂博·拉多于1932年发现. 他证明：若一条围线在平面上简捷地投影为一条凸曲线，则只可能找到一个盘型极小曲面以其为边界.



一曲线，在平面上有其简单的凸形投影线. 如果投影线的每一点对应于曲线上唯一的一点，那么投影线是简单的.

第三个，亦即除了前两个外仅有的一个数学结论也是关于唯一性的，这涉及空间曲线的全曲率概念．例如，半径为1的圆，其全曲率为2π．如果曲线只有一小段很弯曲，则其全曲率不会很大．下面的结论已为人们所知：

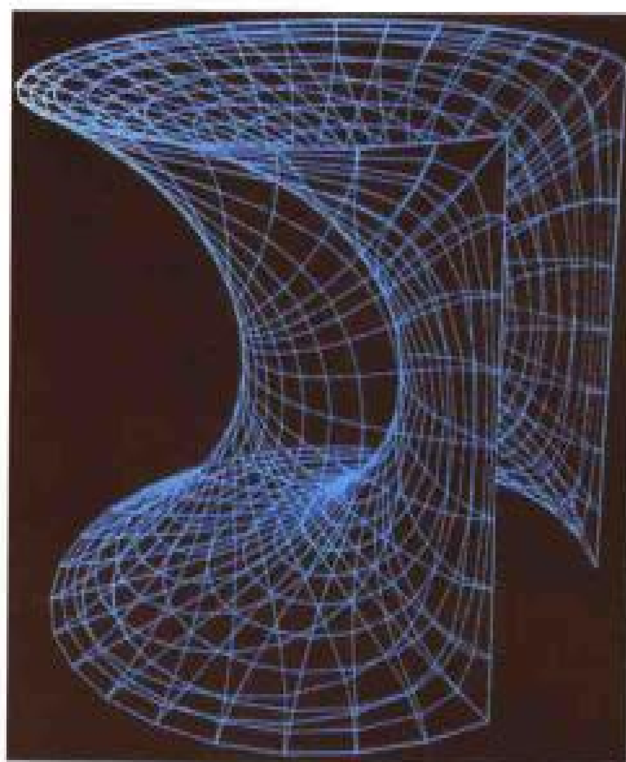
> 倘若给定围线的全曲率小于4π，那么只可能有一个盘型极小曲面以其为边界．

所以，人们或许希望找到张成一个"不太复杂的"围线的盘型极小曲面个数的上限值．但这希望完全落空了．因为显而易见，如果给定一个数目N（诸如100，5 000，10^{100}，…）和一个任意小的正数ε（诸如1/10，1/8 000，10^{-100}，…），必存在一条其全曲率小于$4\pi+\varepsilon$的围线，至少有N个盘型极小曲面以它为边界．这条醒目的定理表明，倘使一条曲线的全曲率比4π哪怕只是大一点点，就会发生十分杂乱而不可想像的事情．

除了上述这三个唯一性结论外，关于极小曲面的个数，或者关于张成给定的非平面围线的盘型极小曲面的个数就别无所知了．没有这样的曲线实例：由它界定不止一个极小曲面，并且张成此曲线的所有极小曲面都是已知的；甚至也没有表明似乎合理的答案的任何实例．可是，若亏格为零，就确实有一条围线界定三个盘型极小曲面的例子．

下一页的图表示两个张成同一条不怎么复杂的围线的极小曲面；但并不知道还有多少极小曲面以这条围线为边界．

诸如是否有界定无限多个盘型极小曲面的围线的有趣问题，现在似乎已有答案了．凭直觉人们似乎明了：一条确定的围线只能界定有限多个这样的曲面；但在数学上，直觉往往使人产生误解．事实上，有一种好似界定无限多个盘型极小曲面的奇



两个曲面张成同一条围线.

怪曲线，即第155页上所示的怪物曲线.

让我们看看此曲线是如何构成的. 起先，取这围线，如下页顶部所画. 此曲线至少包围两个稳定盘型极小曲面（见第150页左上图）. 接着，考察同样的曲线的无限序列 C_1、C_2、C_3、…，它们乃按这样的方式选定：C_2 是 C_1 的一半大小，C_3 是 C_2 的一半大小，如此等等（见下一页的第二图）.

且用一小桥把 C_1 和 C_2 连接起来（见下一页的第三图），在每条曲线上切下一小段，以保证形成一条简单闭合曲线 C^*. 那么，凭藉附加的张成桥的狭带，把张成曲线 C_1 的两个稳定极小曲面中的一个与张成曲线 C_2 的两个稳定极小曲面中的一个连接起来，这样由 C^* 至少围成 $2 \times 2 = 4$ 种盘型曲面的组合形式. 如下所述似乎可信：若桥足够小，则就十分接近于由架桥而生成的这四个"联合曲面"之中的一个，于是便得到了稳定极小曲面.



至少包围两个曲面的简单闭合曲线.











其大小递减的圈线的无限序列 C_1, C_2, C_3, …（C_{i+1} 的大小是 C_i 的一半），趋于一个点.



由桥连接起来的两条曲线.









张成上图所示的复合曲线 C^* 的四个曲面.

这样，从曲线 C_1 和 C_2 得到一条新的简单闭合曲线；由它可围成四种不同的盘型稳定极小曲面. 为什么称作了?用第二座桥（大小比前一座减半）把上一页的圈线序列中的第三条曲线 C_3 与圈线 C'' 连接起来，于是按照前述似乎可信的理由，就得到了另一条简单圈线，由它包围至少 2 × 2 × 2 = 8 种盘型稳定极小曲面. 再往后，用大小递减的桥把 C_4，C_5，C_6 等等曲线一一接上去. 重复此程序无限多遍，则便构成第155页所示的长度有限的那条简单闭合曲线. 在连接程序的每一步，由新圈线围成的极小曲面的数目至少比前一步的曲面数目大两倍. 因此我们可以推测，C 围成的盘型曲面有无限多；事实上，这已被严格地证明了.

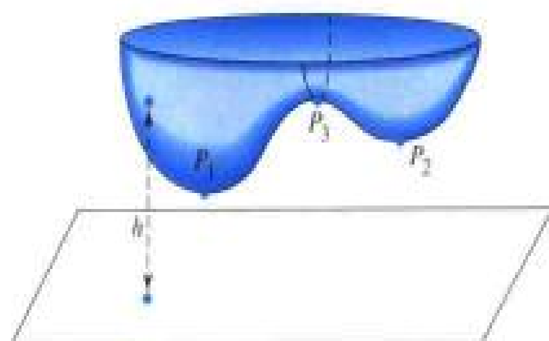
但反过来说，情况并不像所见到的那么坏. 其实，近年来已经证明：倘若随意地选一条简单光滑曲线，则围成无限多个盘型极小曲面的概率为零. 换而言之，这种“坏曲线”极罕见；几乎所有光滑曲线都只是围成有限个数的盘型极小曲面. 这个结论与怪物曲线围成无限多个极小曲面的说法相抵牾，因为怪物曲线可能属于坏曲线的集合. 并且，怪物曲线不是光滑曲线，即使是用光滑的形式接上所有的桥. 怪物曲线的尾端很尖，乃是极不正规的点，是一种纽结.

对于“很光滑的”曲线（用术语说则为解析曲线），所知更多些. 这样的曲线所围成的一切盘型曲面中面积最小的曲面个数只可能是有限的.

关于张成一条确定围线的若干极小曲面的代数公式

且不顾上节所讨论的所有那些特色，目今已发现联系以一确定的金属丝为边界的一切可能的盘型极小曲面的一种方式. 为了解释这一点，让我们回顾一下第161页的图所示之蒂形刚性

碗的简单模型．碗位于平面的上方．设超出平面的高度为h．就h而言有三个平衡点，两个是极小值点P_1和P_2，一个是非稳平衡点P_3．再设想一只蜘蛛在碗内爬行．如果蜘蛛从P_1点或P_2点开始起步，那么不论朝什么方向爬行，它超出平面的高度总是增大．但若从P_3点起步，情况就全然不同．在那一点蜘蛛可能选择一个方向，沿其爬行，超出平面的高度会减小；像第4章中的滑雪者一样，蜘蛛的势能亦减小．我们来命名相互垂直的一些方向的极大（个）数，蜘蛛若沿这些方向爬离平衡点，高度却减小．且称此数为平衡点的特征数．P_1点和P_2点的特征数为0；P_3点的特征数为1．



畸形碗．

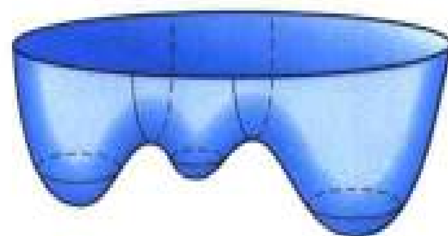
见右中图所示，一只碗倒置在平面上．只有一个平衡点P，即倒置碗的顶端．蜘蛛从P点出发，不管朝什么方向爬行，其高度总是减小；故而P点的特征数为2．


倒置碗上的蜘蛛．

再回过去看第一只碗（右上图）．它有三个平衡点，其特征数分别为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$．然后作出和数：

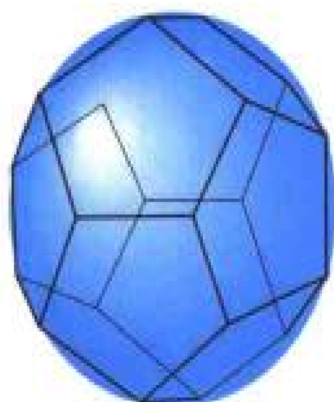
$$(-1)^{\lambda_1}+(-1)^{\lambda_2}+(-1)^{\lambda_3}=1+1-1=1.$$

再设想取一只任意的半球形碗，并使其畸变（但不是沿碗的边缘畸变），形成几个凹陷、几条路径或几个凸起；譬如说，有n个平衡点P_1，P_2，…，P_n，其特征数分别为λ_1，λ_2，…，λ_n（见右下图）．


有三个凹陷的坑槽．

读者可以验证：所有这些例子均满足如下令人注目的方程

$$(-1)^{\lambda_1}+(-1)^{\lambda_2}+\cdots+(-1)^{\lambda_n}=1.$$



多面体可以内接于球面.

这个方程称为莫尔斯方程；它乃通过某种数学结构而强加给人们，此数学结构则是通过碗的拓扑性质而显示的. 要理解莫尔斯方程的更深入的涵义，关键在于莱昂纳德·欧拉的一个发现. 他注意到，如果一个多面体内接于一个球面，那么

$$V - E + F = 2,$$

其中，V是多面体的顶点个数，E是棱边数，F是表面的个数. 此式对于任何多面体都是正确的，所以必须归因于球面的拓扑性质.

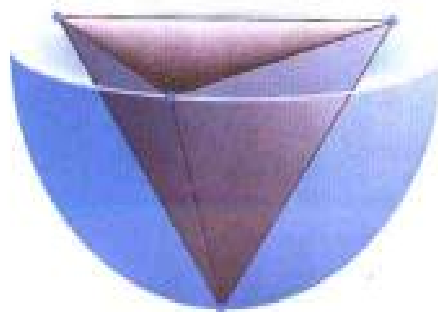
对于半球面，即上述开口的未畸变碗（从拓扑意义上讲，此乃带有一个孔的球面），亦有类似的方程成立. 将任意多面体内接于碗面，须记住它的顶部是开口的. 为简单起见，取一倒置的三面棱锥体，并无底面（相应于顶部开口的碗）. 此例中$V=4$，$E=6$，$F=3$，于是

$$V - E + F = 1.$$

在莫尔斯方程中，计及所有平衡点及其特征数，便得到与此相同的数值. 再则，对于这样的任意内接多面体，均有$V - E + F = 1$. 这两个和的等式

$$(-1)^{\lambda_1} + (-1)^{\lambda_2} + \cdots + (-1)^{\lambda_n} = V - E + F$$

倒置于碗内的无底棱锥体.



乃由数学家马斯顿·莫尔斯(Marston Morse, 1892—1977年)于大约五十年之前发现的一个意义深远的事实(此公式是如今所谓莫尔斯理论的基础). 马斯顿·莫尔斯, 普林斯顿高级研究所的数学教授, 因其用变分法建立了拓扑与平衡点之间的联系而著名, 他首先把这种观念用于极小曲面.

但须怎样处理极小曲面呢? 在本章前面, 我们已提及, 根据有限性定理, 一切围线在如下意义上才是"适当"的: 它们只包围有限个盘型极小曲面. 设 C 是一条这样的适当曲线, 则对应于某一个整数 N, 恰好有 N 个盘型极小曲面张成 C 曲线. 且将这些曲面记以符号 S_1, S_2, $\cdots$, S_N. 或许其中只有一部分曲面的面积实际上为极小.

有一条定理要求涉及数学发展的一个非同寻常的概念: 对每一个这样的极小曲面 S_i 指定一个特征数 λ_i. 其意义与哑铃摆模型中的特征数相类似. 尤其是若 S_i 的面积极小, 则 $\lambda_i=0$. 将拓扑学领域的一些概念与变分法相结合, 便可证明莫尔斯方程

$$(-1)^{\lambda_1}+(-1)^{\lambda_2}+\cdots+(-1)^{\lambda_N}=1$$

成立. 这个方程对前述那个结论提供以一种新的证明: 前述凡存在两个极小值, 必存在第三个非稳极小曲面(见第162页的图C中画出了一个非稳极小曲面). 为了看清这一切, 我们且假定: 有两个其面积极小的曲面张成一适当围线, 并无别的极小曲面. 由于每个极小值的特征数都是零, 莫尔斯方程的左边则为

$$(-1)^{\lambda_1}+(-1)^{\lambda_2}=(-1)^0+(-1)^0=1+1=2\neq 1.$$

那么, 这就有违于莫尔斯等式. 所以必须还有另外一个其特征数为奇数的极小曲面: 它不可能有局域极小值, 而必定是非稳

定的. 一般说来，依据莫尔斯方程，凡存在n个其面积极小的曲面张成一条围线，就暗示必有另外$n-1$个非稳极小曲面以这同一围线为边界.

悬链曲面和螺旋面

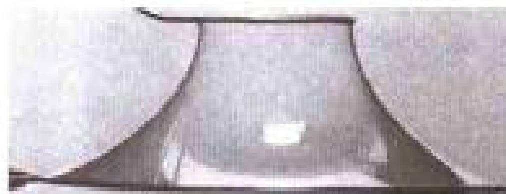
上一节讨论了以单一闭合曲线为边界的极小曲面. 在本节中再来考察有两条或更多条边界曲线的极小曲面. 这种面积为极小的曲面与以几根金属丝为边框的肥皂膜相对应.

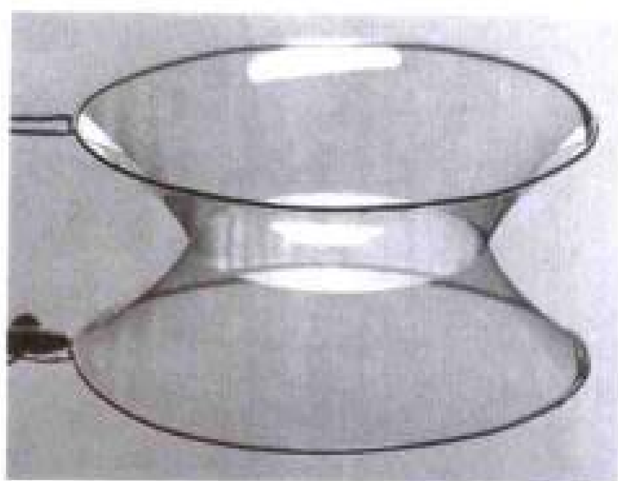
如果把两根闭合金属丝浸到肥皂水中，然后再取出，会发生什么现象呢? 会得到两层分离的肥皂膜，每个金属丝圈蒙上一层；或者，倘若运气好，会看到将两个金属丝圈连起来的一层肥皂膜，如下图所示. 该图中的连接肥皂膜与圆环具有相同的拓扑型，转而又与带有两个孔的球面（见第153页的图C）的拓扑型一样.

假如你试着亲自做这个实验，你会发现，倘若两金属丝圈离得太远，是不可能得到这样的曲面的；即使两金属丝圈相互靠近，也不会得到一层光滑的连接肥皂膜，却会得到下一页上图所示的由三个极小曲面组成的体系. 这个体系并非前文列出的那种可能张成一条边界围线的数学曲面；因此，不得不再一

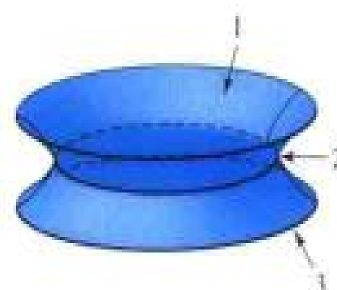
架于两个金属丝圈上的一层肥皂膜.

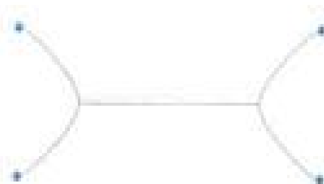






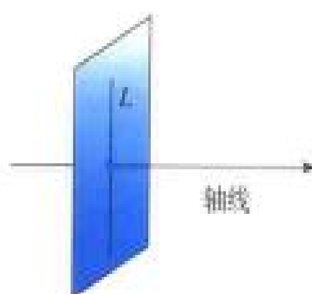
次把曲面的定义推广．处于稳定平衡状态的肥皂膜具有这样一种性质：在一液层边缘上只可能有三个曲面相交于此，而且必定两两交成120°角．我们将在下一节以长一些的篇幅讨论这个现象．





三个极小曲面并带有两条边界圆周线的体系．

这个由架于两个金属丝圈的三层肥皂膜组成的体系，其面积为相对极小，但比光滑的连接圆环膜的面积大些．在肥皂膜实验中，使肥皂膜形成为圆环状，而不形成为三层膜体系，乃是采用一简单的技巧所致．在把金属线圈从肥皂液中取出之前取一根细杆（或就用一手指即可）穿过这金属丝圈，然后再把它们取出；那么，圆环面就呈现出来了．



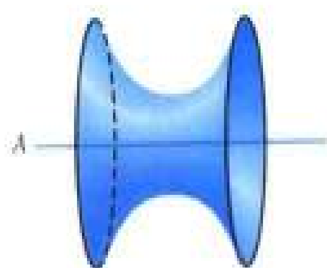
作为一旋转曲面的平面．

在环形极小曲面与人所熟知的力学曲线之间有一种使人惊奇的关系．且考虑旋转曲面．形成此曲面的一个最简方式是把一条曲线绕着一根固定的轴线旋转．在旋转曲面中有极小曲面吗？显然有一个候选者：平面；把一条直线L绕着一根与L垂直相交的轴线旋转即得．

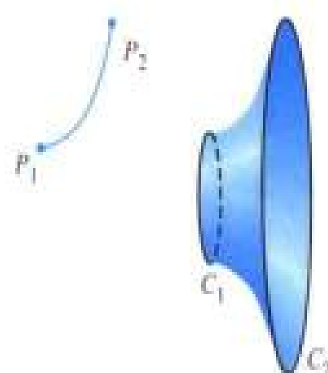


带有一根链条的水平杆，链条下垂呈悬链线形状．

除了显而易见的平面型旋转曲面——平面和圆盘面外，还有别的其平均曲率为零的旋转曲面吗？恰有另一种类型，且看看它是如何形成的．把一根链条悬挂在一根细杆的两端．当它



悬链曲面，是一种旋转曲面.



悬链曲面，以半径不同的两个圆为边界.

静止时，就形成一条被称作悬链线[1]的曲线. 将这条曲线绕着一根平行于细杆、并位于链条下面的轴线旋转，便得到唯一的一种非平面型极小旋转曲面；由证明得出悬链线的最低点与旋转轴的距离为 $h=\sqrt{b^2-l^2}$，其中 l 是链条长度的一半，b 为细杆与旋转轴之间的距离. 这个极小曲面乃唯一的一个弯曲的极小旋转曲面，由欧拉于1744年发现. 该曲面被命名为*悬链曲面*，其原因十分明显. 如下述可知，它乃以不同半径的圆周线为边界.

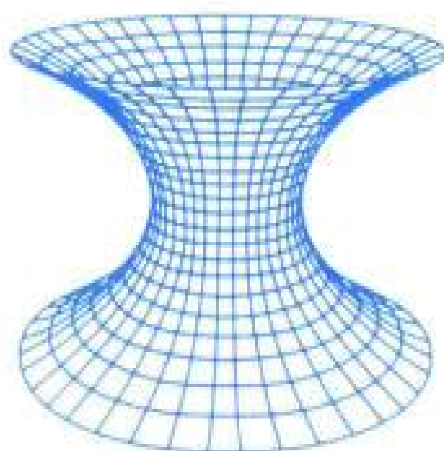
前文已经提及，两个金属丝圆圈只要离得过远，就不能形成其连接极小曲面. 这里着手研究悬链曲面，倘若把两个边界圆周线 C_1 和 C_2 分开些，会出现什么情况呢？如果用肥皂膜做相应的实验，便会发现，在共轴金属丝圆圈相隔临界距离时，肥皂膜会破裂，立即变作两个分别张成 C_1 和 C_2 的圆盘膜. 悬链曲面会破裂的那个临界距离可精确地算得. 例如当圆形金属丝圈有相同的半径 R 时，临界距离 d 大约为 R 的 1.325 487 倍.

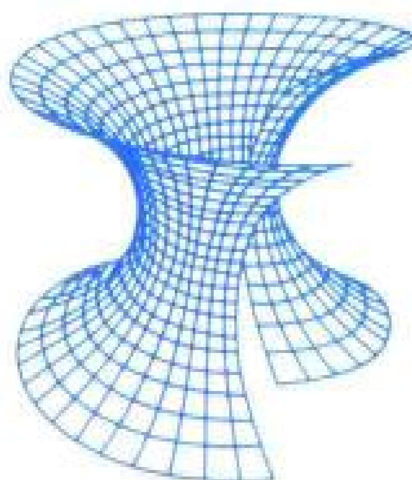
事实上，只要两个圆的距离小于其临界值 d，这两个圆便界定两个悬链曲面，但只有一个是稳定的（非稳的那一个更弯一些），所以由这两个金属丝圆圈只能支持一个连接肥皂膜. 另一个稳态构型是张成 C_1 和 C_2 的一对圆盘膜. 因此我们再一次想到：既然存在两个稳态肥皂膜，那就暗示有第三个非稳态构型.

利用悬链曲面可以做一个很奇妙的实验. 起先，用一些弹性材料做一个这种曲面的模型；然后将此模型沿其一根经线切开，并把切口处的两条边缘轻轻拉开，再将曲面扭转，如下一页的图所示. 这样，可把悬链曲面毫无损伤地弯成一段众所周知的另一种极小曲面——螺旋面. 这里描述的悬链曲面等轴变形

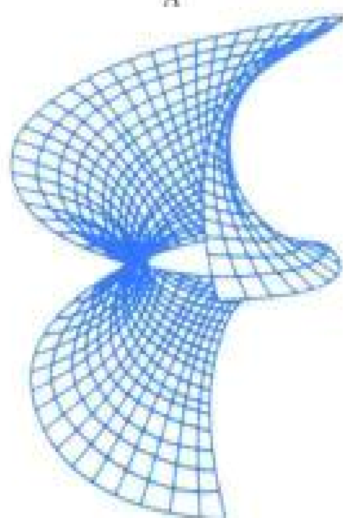
---

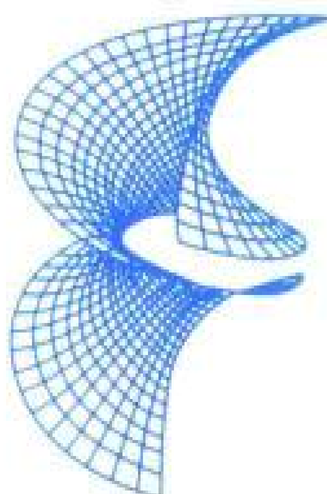
[1] 悬链线（catenary）源自拉丁语词 catena，意指链条或链线.

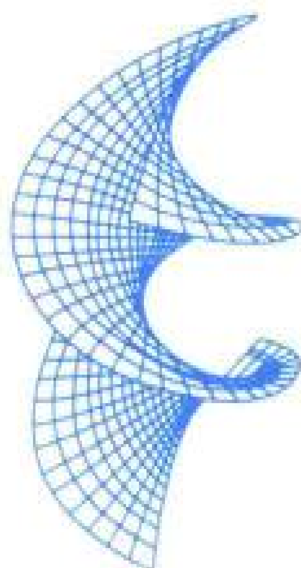

A

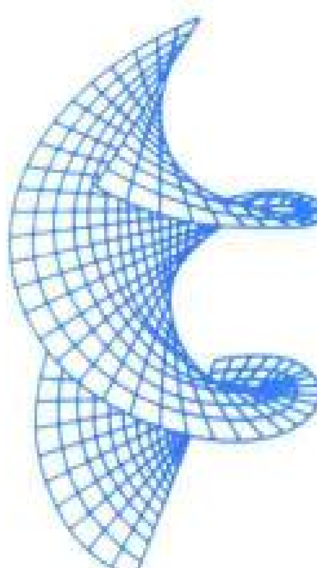

B

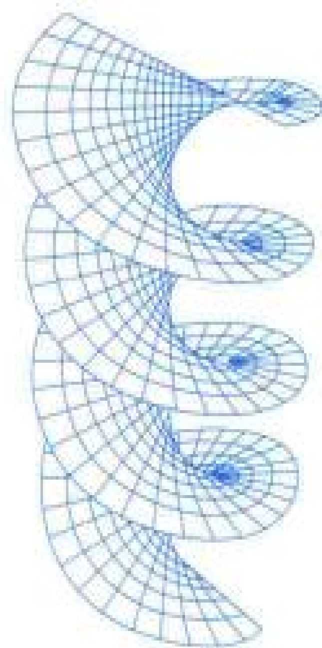
悬链曲面等轴变形，成为螺旋面.


C

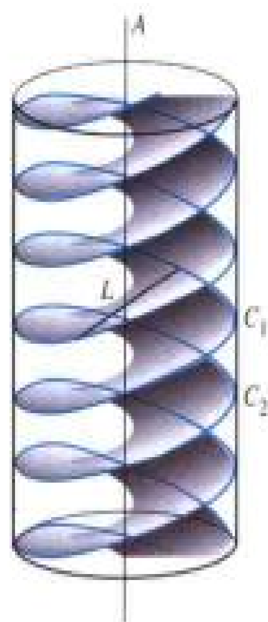

D


E


F



螺旋面，可用于设计旋转楼梯.



螺旋面的生成.



双螺旋.

（或扭转），成为螺旋面；这甚至更引人注目，因为扭转过程里的一切中间曲面都仍然是极小曲面！



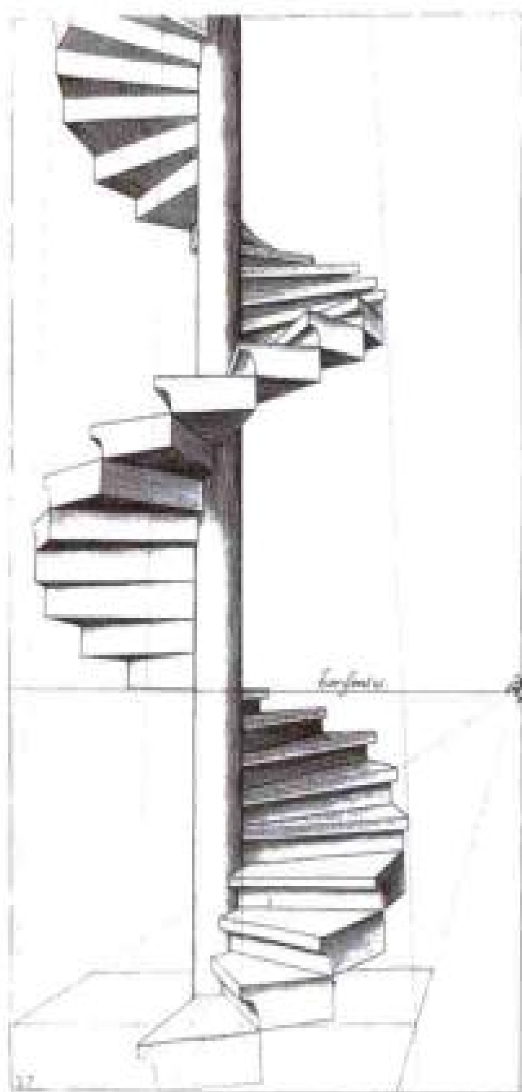
双螺旋线[印刷标记，取自阿拉蒂（Aratus）《现象》，巴黎，莫雷尔（G.Morel），1559年].

继悬链曲面之后，螺旋面、或曰螺纹曲面，是极小曲面中最早发现的第二个实例. 它在1776年已为人们所熟知，当时法国几何学家默尼耶发现，螺旋面的平均曲率为零. 其实，建筑师建造旋转楼梯，正是采用螺旋面的形式；在欧洲的大宅第里可以找到这种漂亮的楼梯.

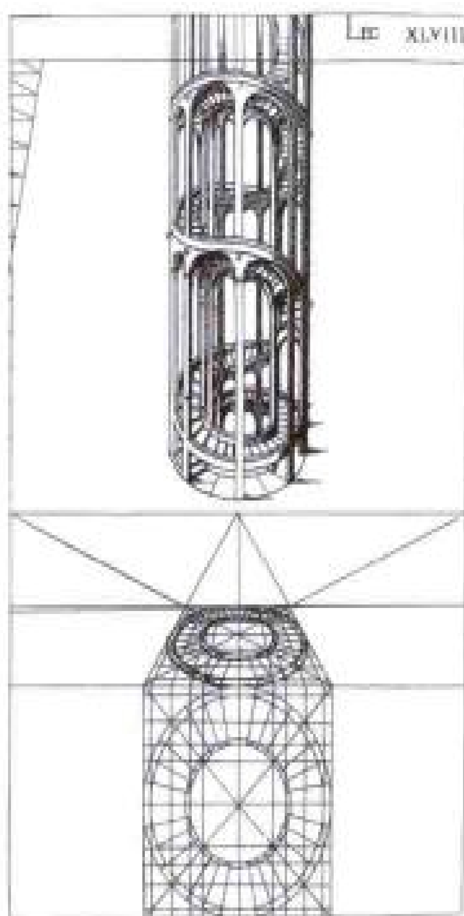
螺旋面的结构原理颇易理解. 且取一条直线段L，与某一固定轴A垂直相交. 然后使L以恒定速度围绕A轴旋转；同时使L线与A轴的交点P亦以恒定速度沿着A移动. 这两种运动的合成导致L线段的螺旋运动，被L扫过的曲面就是螺旋面. 上中图表示位于以A为轴的圆柱面内部的一段螺旋面. 此螺旋面与这样的圆柱面交成两条螺旋线、或曰螺纹曲线，即C_1和C_2，二者形成一对螺旋线. 试想把每条曲线代以一薄纸带，如上右图所示，于是得到一种几何图形：双螺旋；它用作DNA分子——遗

传密码的载体的一种模型.

悬链曲面是其边界由多于一条闭合曲线组成的极小曲面中的最简实例. 另一例子如下一页的左上图所示，其中极小曲面张成两个连接线圈. 此线圈体系还提供了一种边界构型的实例；这构型可能由无限多具有相同拓扑型的极小曲面所张成（我们想起，这是极小曲面研究的核心问题之一）. 且选取三个一组的其圆心共轴的圆线圈作为边界，它们的半径相同、彼此相隔相等的甚小距离. 那么可以证明，有一包含无限多个零亏



旋转楼梯.

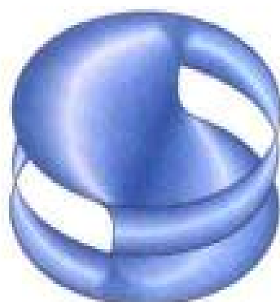


楼梯设计图.


张成两条连接曲线的极小曲面.






无限多极小曲面中的一个，它张成的围线，乃由三条其中心为同轴的圆周线组成(下图).上图所示的这样构型的两条闭合曲线，围成一个环形极小曲面(中图).然后将此曲面反射;反射所得的曲面与原来的曲面相交于半圆围线的直线段.

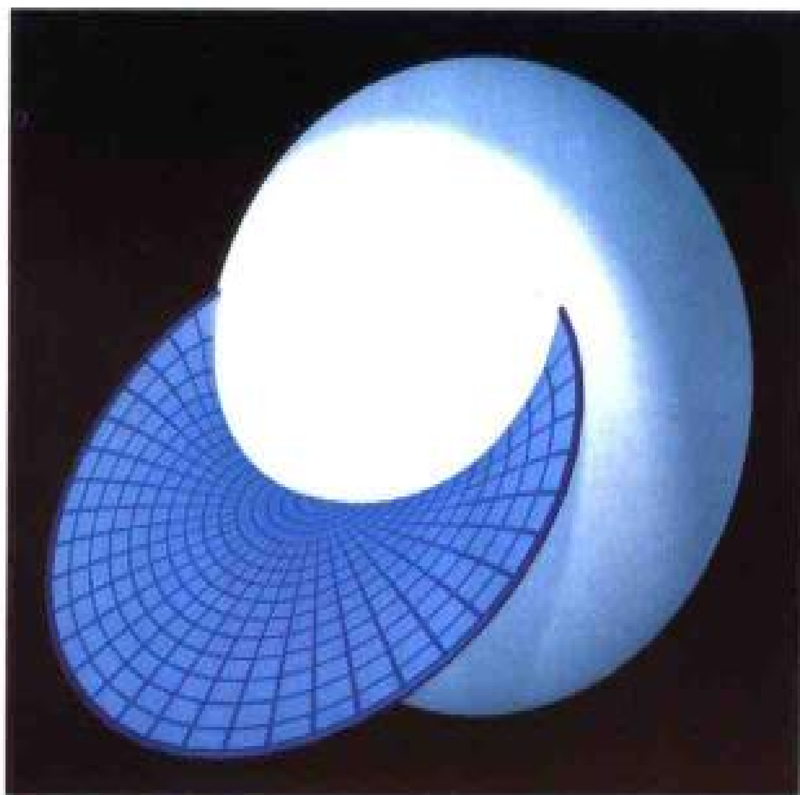
格的极小曲面的曲面族以此线圈组合为边界. 左边最下面的图即给出一种这样的曲面. 曲面族的所有曲面由其中一个曲面绕着共轴圆的轴线简单地轮回而得到. 因此可以猜测，这并非有限性的实际反例. 此异议不无道理. 故而如果不能通过空间中的刚性运动从一个曲面变为另一个曲面，那么便可称这两个曲面是"确实不同"的. 有多少"确实不同"的极小曲面的问题完全未得解决，这些曲面的拓扑型相同，能张成由一条、两条、三条……曲线组成的边界构型.

流体边缘、三个基本角度：90°，120°和109°28′16″

且考察一下下一页的右上图所示的肥皂膜. 这个稳定极小曲面不同于我们已经谈到过的那些曲面. 其边界不是全部系在一个给定的金属丝线圈上，而是有一部分系于一个指定的曲面(称为*支持曲面*). 所以，这种肥皂膜的边界不是如同普拉蒂奥问题那样完全指定，而可能在支持曲面上选择一个最佳位置.

为得此实例，且取一由玻璃或有机玻璃制成的曲面S，再将一曲线C，即一金属丝附接于S面上的两点P_1和P_2. 构架(C, S)由曲面S和附接金属丝C组成. 然后将构架在肥皂液中浸一浸;取出时，一层附着于金属丝上的肥皂膜便形成了. 但一部分边界必然是支持曲面上的液体边缘. 此边缘称作Σ，由肥皂膜生成，使皂膜面积为极小. 曲线Σ即所谓支持曲面S上的肥皂膜(亦或稳定极小曲面)的*自由边界*. 下一页的上图表示肥皂膜的全部边界、其中的一段是自由边界.

关于自由边界Σ的形状，我们说不出很多. 事实上，S面上的几乎每条曲线都可能是肥皂膜之自由边界的一部分. 但凭所



一极小曲面与球面S垂直交接（计算机模拟解）.

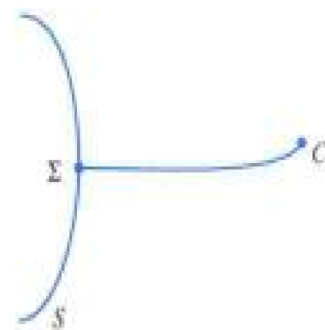


一个带有部分自由边界的极小曲面.

有经验可得一条规律：肥皂膜的光滑部分必与其光滑的支持曲面垂直地相交，如右下图所示.

H·A·施瓦茨给出了对于由普拉蒂奥从肥皂膜实验观察到极小曲面这个事实的严格的数学证明．于是得到

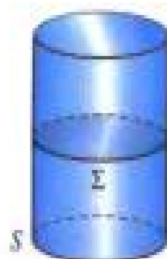
规则1　若一极小曲面在其支持曲面S上有一段自由边界Σ，则该曲面沿曲线Σ与S面交成直角.



C线与S面的自由边界Σ交成直角（横截面图）.

这条90°规则，下文将一次又一次地提到.

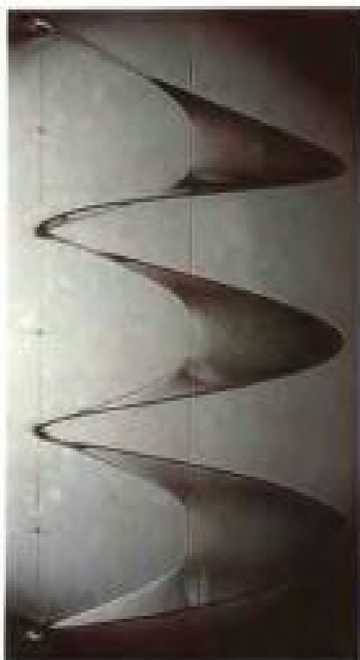




具有全部自由边界的极小曲面.





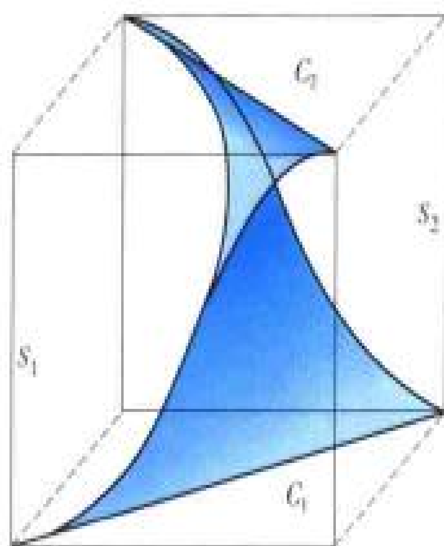




四个肥皂膜实验，显示带有部分自由边界的边值问题的解.

法国数学家J·D·热尔刚于1816年提出了最早的关于带有一个自由边界的极小曲面问题：

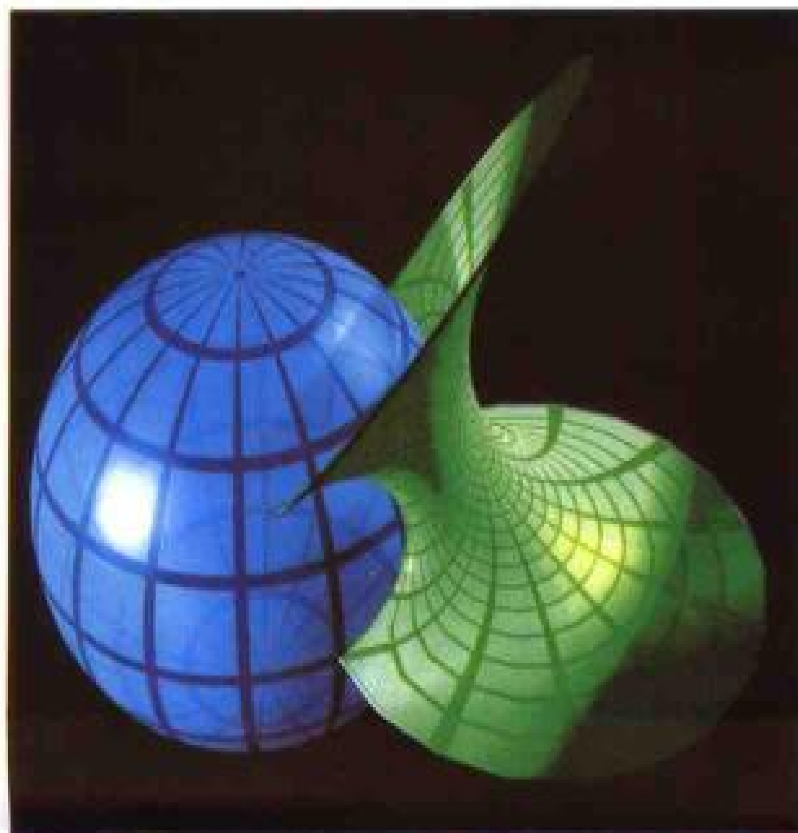
> 将一个立方体用一个曲面M（如右图中的蓝色区域所示）分成两部分，M把位于立方体相对的两表面的两条反向的对角线C_1和C_2联结起来，而且M的面积为极小．



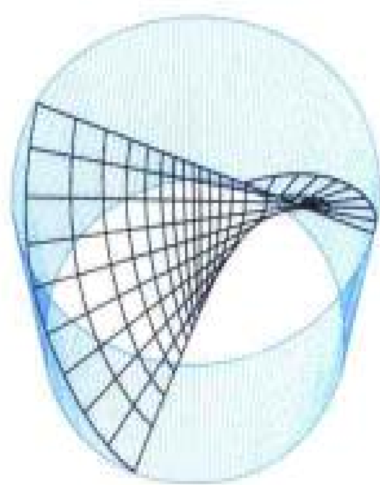
热尔刚曲面．

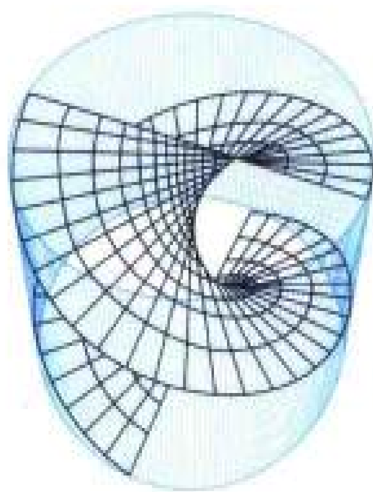
起先，对于回答这个问题的种种尝试均有偏差，其解直到1872年才由施瓦茨求得．此极小曲面虽由施瓦茨发现，但一般被称作热尔刚曲面．它与立方体的另外两个表面S_1和S_2交接成直角．

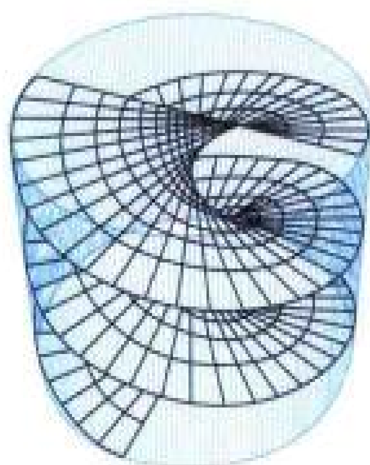
边界构型〈C_1，C_2，S〉对应于无限多“确实不同”的解的形式，此构型由螺旋面（“旋转楼梯”）形成，可能是由一个



具有部分自由边界的边值问题的边界构型为〈S，C_1，C_2〉，该图表示此问题的解（计算机模拟解）．

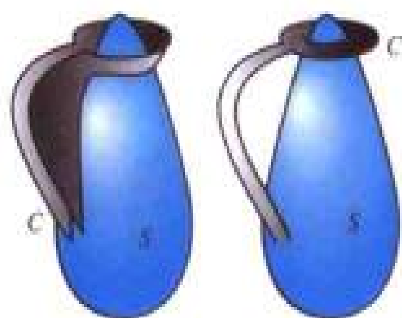




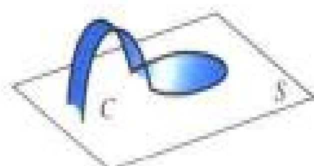


无限多"确实不同"的极小曲面中的三个,它们张成一种特定的边界构型.

圆柱面S和两条垂直的直线段C_1和C_2得出,C_1和C_2在不同高度上通过圆柱面的中心轴.



关于具有三条自由边界的极小曲面的存在性定理由理查德·库朗于1940年提出,至1951年由汉斯·卢伊(Hans Lewy)对于自由边界∑首先作出详细的研究. 然而,施瓦茨和芬兰数学家内奥维乌斯(Neovius)、斯特纽斯(Stenius)和塔尔奎斯特(Tallquist)已经证明张成了边界构型〈C, S〉的极小曲面的存在性定理;这里,S是一平面,C是一条其端点在平面上的多角形折线.

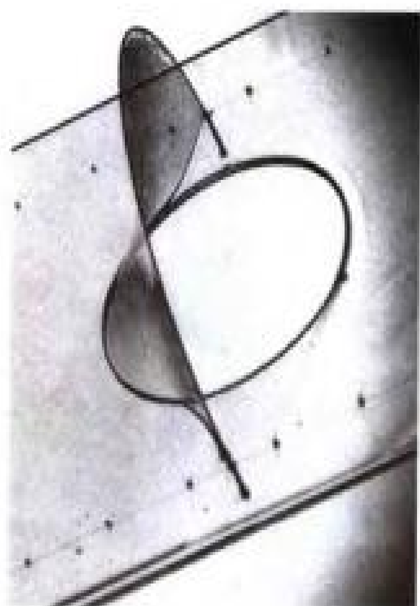


库朗已经注意到,能够得到张成给定框架构型〈C, S〉的肥皂膜(其面积极小),但实际上是不相同的曲面,甚至其拓扑型式也不同(见左图).

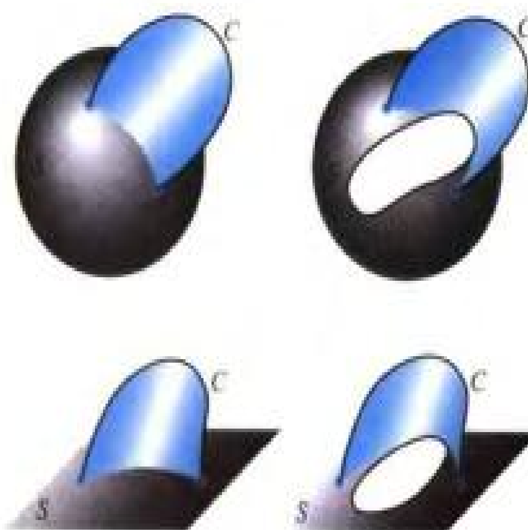




若支持曲面S本身有某一边界,肥皂膜至少沿着这边界的一部分被附接于S面,则会产生新的情况. 那么规则1不再成立,因为此时肥皂膜不能完全自由地移动,S面的边界是其障碍物. 但肥皂膜依然与支持曲面S的"内侧部分"交成直角. 有趣的是,我们注意到:通常,肥皂膜的自由边界相切地附接于S的边界. 这通过实验(见下一页左上方的照片)和严格的数学证明已予证实.



自由边界相切地附接于支持曲面的边界.

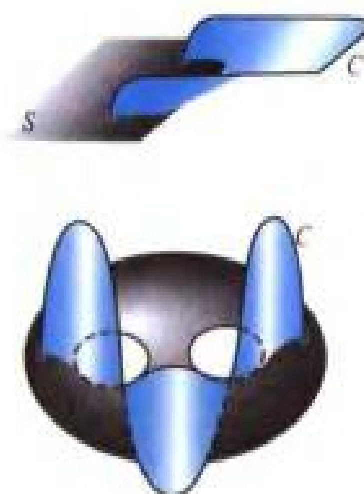


左：部分自由边界问题的两个解.

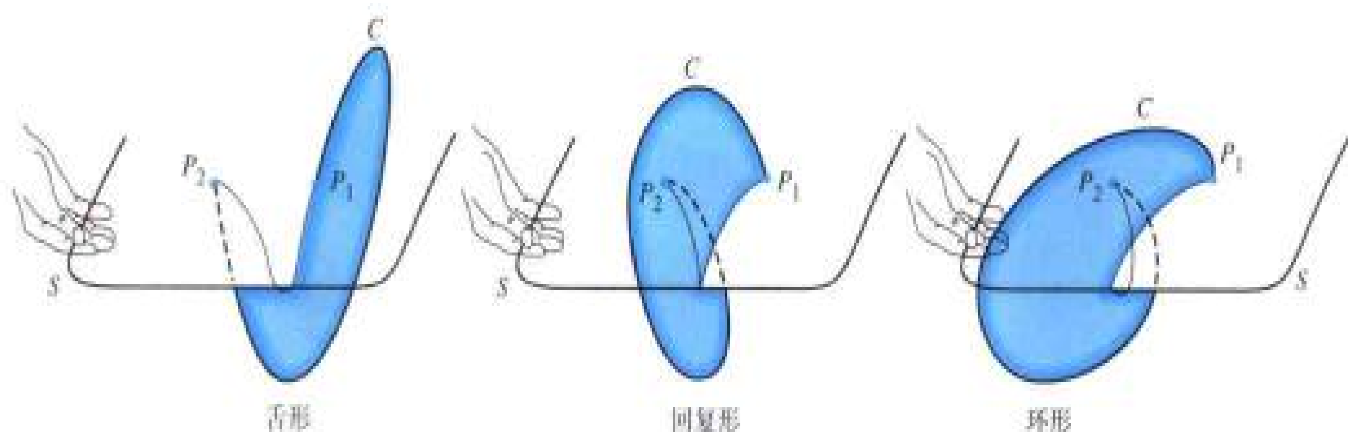
右：支持曲面上的切口使这个问题变成障碍物问题，其解可能为附接于作为障碍物的孔洞边界.



肥皂膜实验显示一个障碍物问题的经验解.



支持曲面上的障碍物.

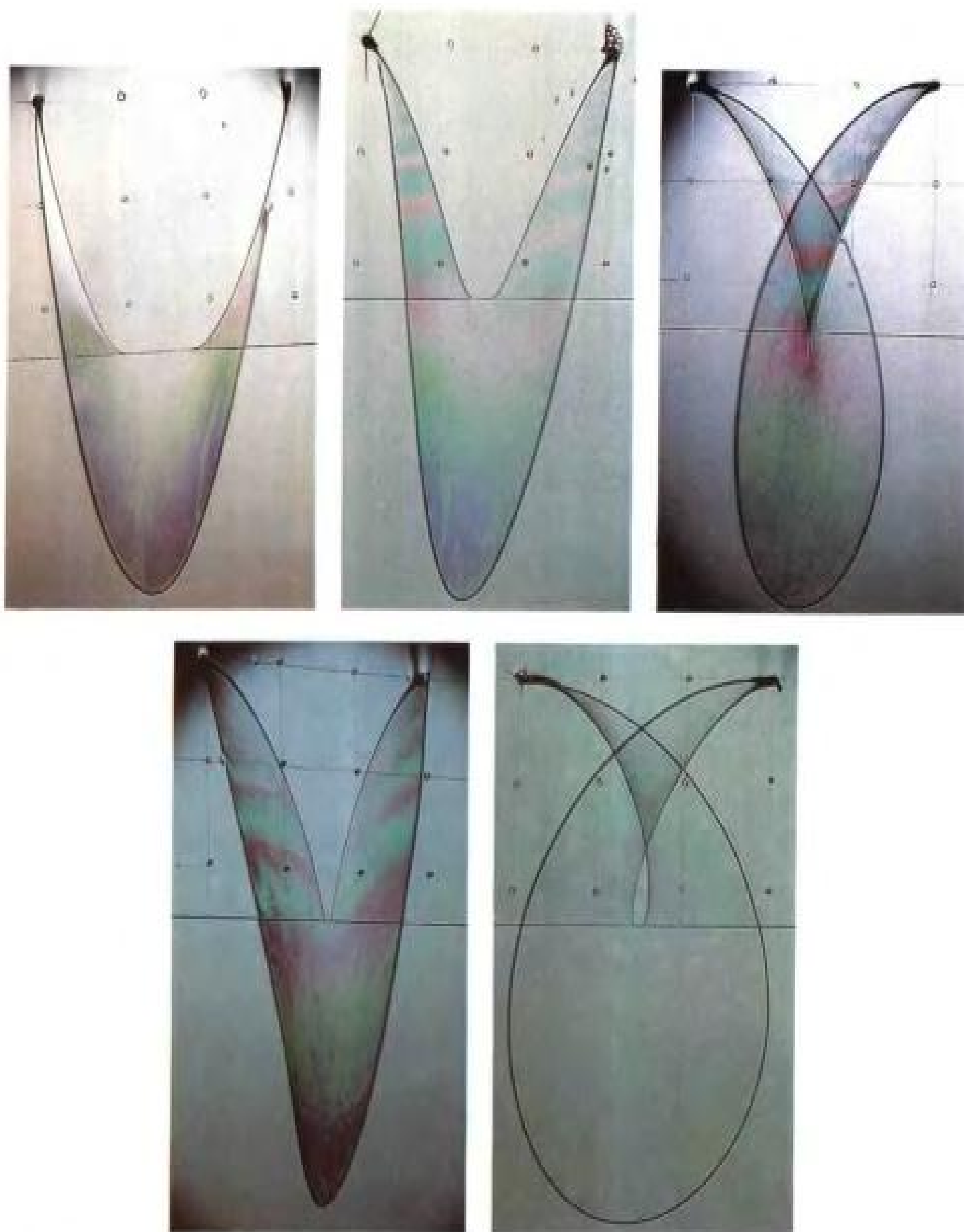


三种构型——舌形、回复形、环形，肥皂膜的自由边界能在由一个平面和一个绕着平面的金属丝组成的构架内形成.

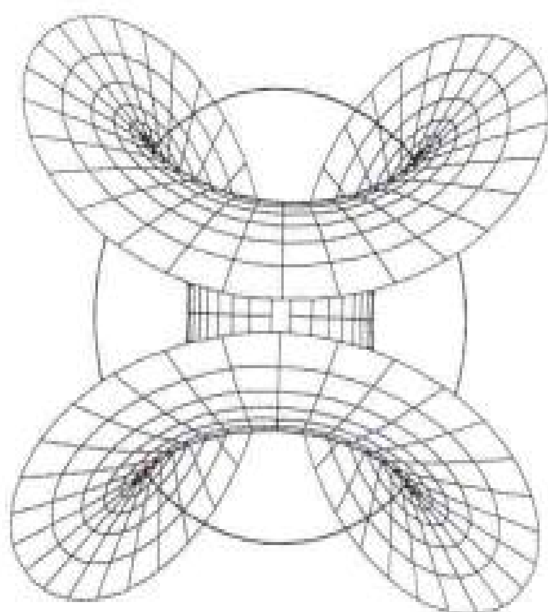
可是，在某些很特殊的情况下，自由边界∑可能有一种回复形奇异性（就是说，存在一个那样的点，此处支持曲面与∑不相切）. 这种情况可通过如下方式产生. 取一片玻璃平板 S，使一根金属丝 C 的一端固定在 S 板上面的某一点 P_1，将它弯曲绕过 S 的边缘，再使其附着于 S 板下面的某一点 P_2（见上图）. 这好像是把一个圆在某一点切断，使两自由端只是稍稍移开些，所形成的肥皂膜的自由边界则就呈为舌形. 但如果将金属丝 C 扭曲：在 S 板上是向着 P_2 弯，而在 S 板下是向着 P_1 弯，那么舌形会变成环形. 你若很仔细地做这个实验，会使金属丝呈回复形——作为二者的中间状态. 下面的照片表示肥皂膜实验的这三步程序.

肥皂膜实验显示舌形、回复形和环形.

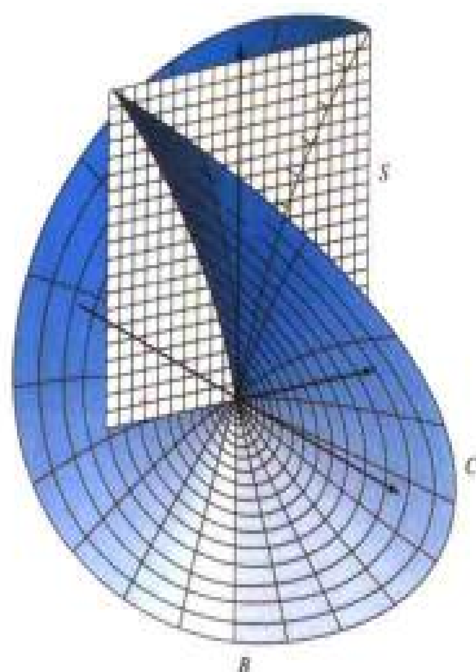




另外一个肥皂膜实验系列显示，具有部分自由边界的边值问题中极小曲面的舌形—回复形—环形的变化情况。

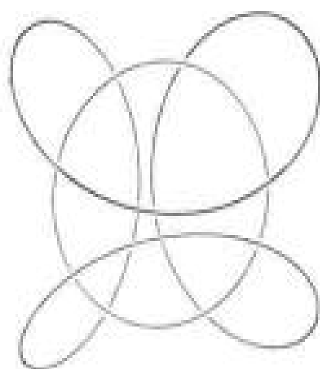


亨内贝格曲面的伴随部分，该曲面与一圆盘面垂直地交成一星形——四角星.此边界构型支托这个由一条闭合曲线和一个圆盘面（见左下图）组成的极小曲面.



亨内贝格曲面

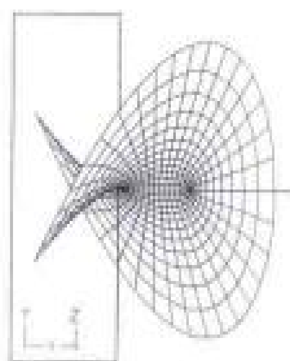
此外，上右图表示由一半平面S和界定一极小曲面的曲线C组成的框架，其自由边界呈回复形. 这个能以肥皂膜作为其模型的曲面由亨内贝格（Henneberg）于1876年发现. 其自由边界是一条被称作尼尔抛物线或半三次抛物线的曲线（见下图）. 它的两个分枝可表述为 $y = x^{3/2}$ 和 $y = (-x)^{3/2}$，并非如普通抛物线由 $y = x^2$ 给定.



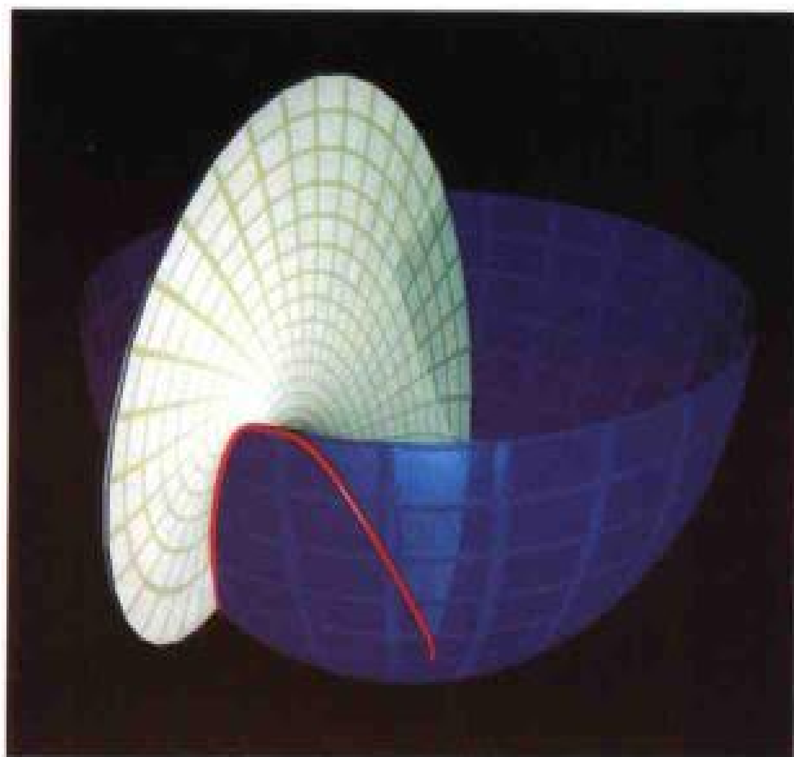
左上图所示的极小曲面的边界构型.



尼尔抛物线.

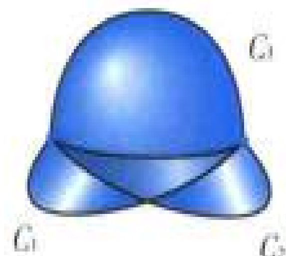


从另一方向看到的右上图所示的亨内贝格曲面的一部分.

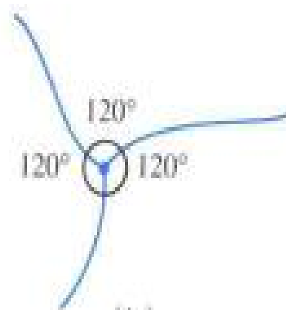


由一段弧线界定的肥皂膜（绿色）和半球面（紫色）。此膜与半球面垂直交接．交线（标以红色）接触赤道，即半球面的边界；若非垂直交接，便可看到舌形征状．

支持曲面S上的自由边界并不罕见；这时有肥皂膜的液体边缘出现．在一个框架内的几个肥皂膜相交成一个或几个边缘，以致形成一个稳定的膜结构，亦即一个限于给定边界构型之内的其面积为极小的曲面体系．例如，交于两点的三段圆弧C_1、C_2、C_3（见右图）可能被带有共同的液体边缘Σ的肥皂膜体系所张成；在Σ边缘上，三个膜中的任意一对膜之间都交成120°角．



（a）



（b）

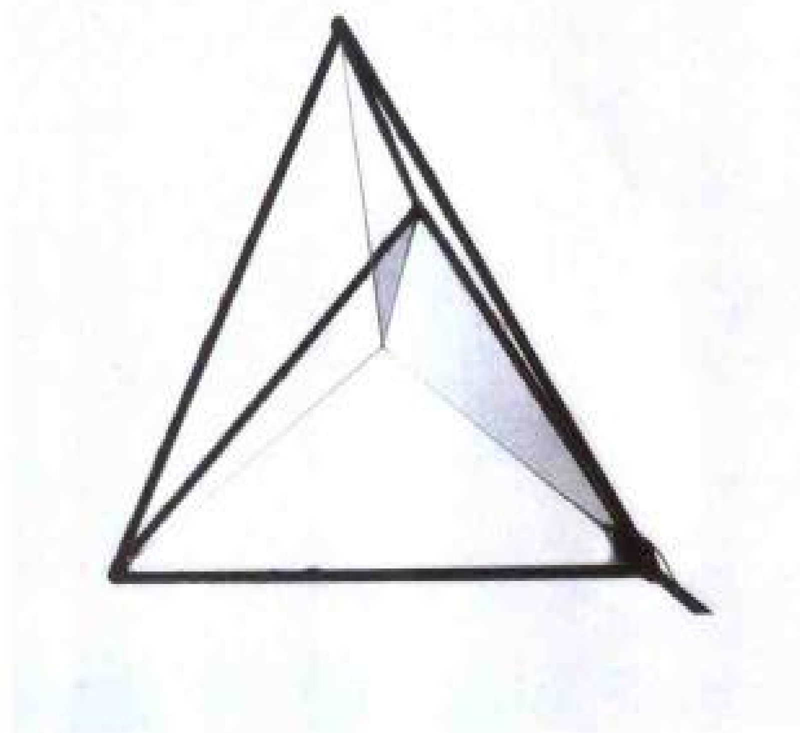
（a）三个曲面两两交成120°．

（b）三曲面两两共同的液体边缘（横截面图）．

四面体框架（见下一页的图）提供另一个实例．此乃界定了由六个肥皂膜组成的体系，它带有四个液体边缘．再则，两个膜沿同一边缘交成120°角．并且，实际上四个液体边缘有一个共同的顶点，在此点每对边缘交成φ角，φ=109° 28′ 16″；精确地说，φ是这样一个角，其余弦为$-1/3$（$\cos\varphi=-1/3$）．

普拉蒂奥从实验中了解，这两个实例颇为典型，此外别无发现．于是便得出关于肥皂膜的稳定构型的第二条规则：

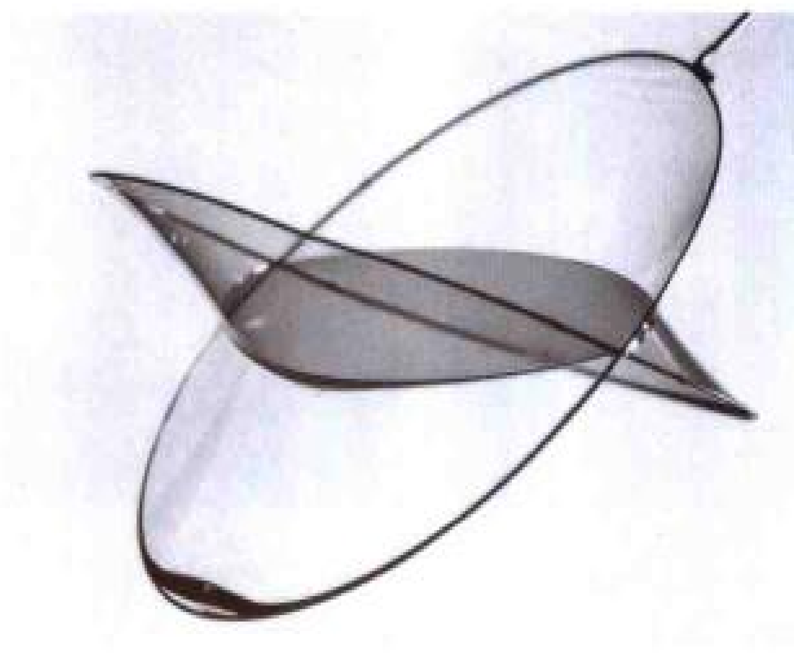
四面体内的肥皂膜体系.



■ **规则2** 其面积为极小的曲面体系中的三个光滑的极小曲面沿着光滑的线段两两交成120°角. 这样的线段只有四条，每一条由三个曲面交成；四条线段又交于单一的一点，在此点两相邻线段之夹角均为109° 28′ 16″.

这条规则关于120°的部分，其严格的数学证明早为人知，很容易得出，只要已知交线是光滑的即可. 然而对于第二部分的令人满意的证明直至近期才由罗特格斯大学的数学教授让·泰勒（Jean Taylor）给出.

证明规则2的第二部分时用到的主要概念如下所述. 且设极小曲面及其交线已知是光滑的. 于是从曲面体系中选定某一点P，并使P点的一些愈来愈小的邻域扩张至同样的尺寸. 那么，就极限意义而论，所有曲面看来都是平的，而所有曲线看来都是直的. 原来的曲面体系具有面积极小的性质，这暗示：因扩张而得到的平面的新构型也具有其面积为极小的性质. 且以P为中



一肥皂膜体系，其边界构型由两个圆金属丝圈组成.

心画出一个球面，并使其与曲面的平直构型相交接，其交线是大圆. 平直体系的面积极小这个性质意指：至多三个大圆相交于一顶点，两两交成120°；否则，此平直构型的面积会减小.

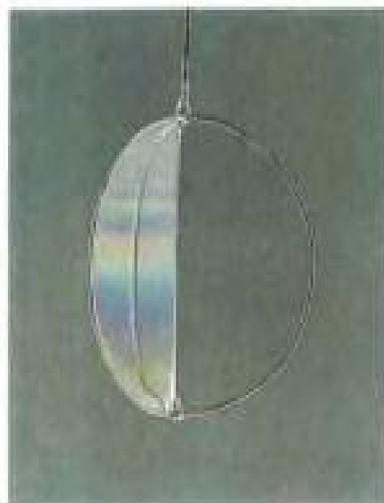
那么，接下来的问题是：何谓球面上所有可能的大圆网络？其中三个大圆相交，两两的交角均为120°. 为了得到答案，必须求解关于球面、而非平面的斯坦纳问题. 利用球面三角学可以证明：只可能有十种短程线网络；经过更细致的分析则了解，十种网络中唯有三种对应于面积极小（在此意义上——它们支持带有一个以球面中心作为顶点的、其面积为极小的锥面）. 这就是下两页上十幅图中的头三幅（a），（b）和（c）所示的情况. 第一幅对应于平面，第二、三幅对应于第191的右图和上一页的图所示的情况. 如此便证实了规则2.

覆盖多面体框架的肥皂膜体系形成为很漂亮的曲面构型.





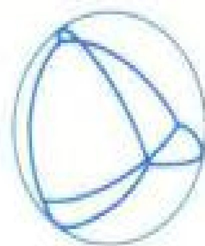
(a)





(b)





(c)



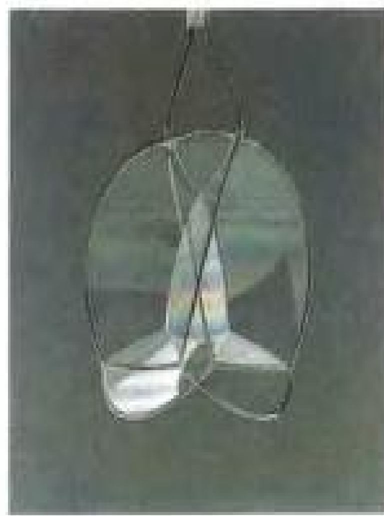


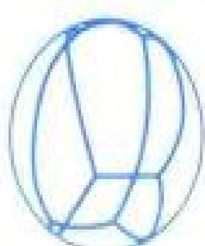
(d)



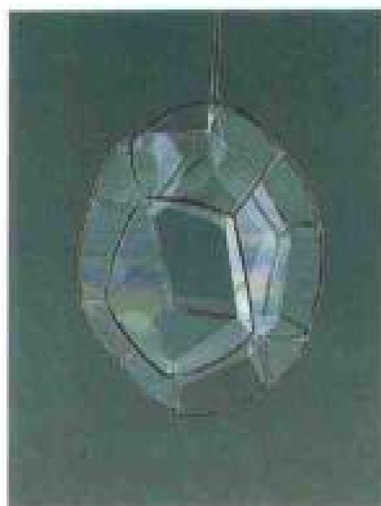


(e)



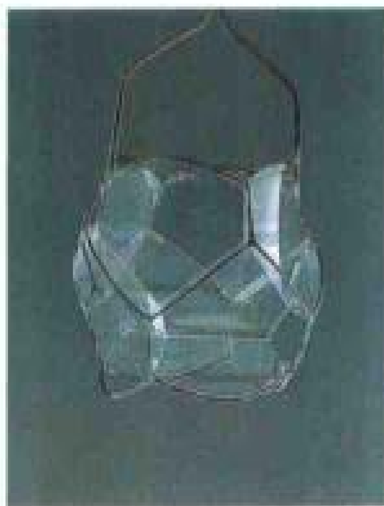


(f)



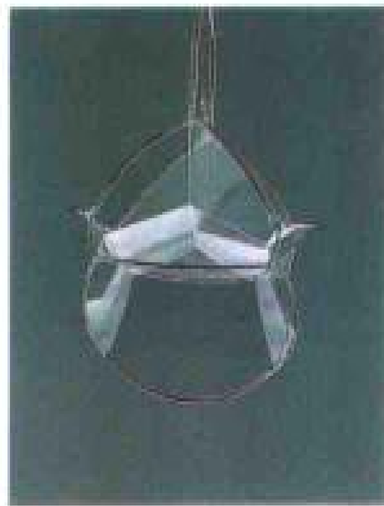


（g）



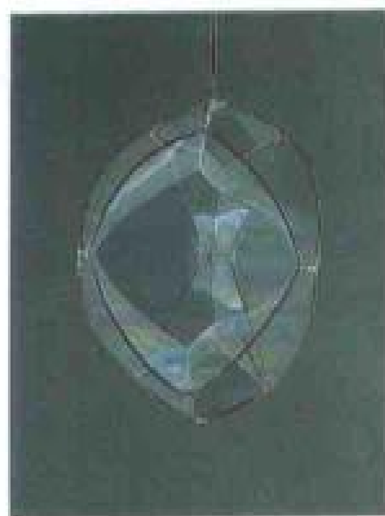


（h）





（i）





（j）

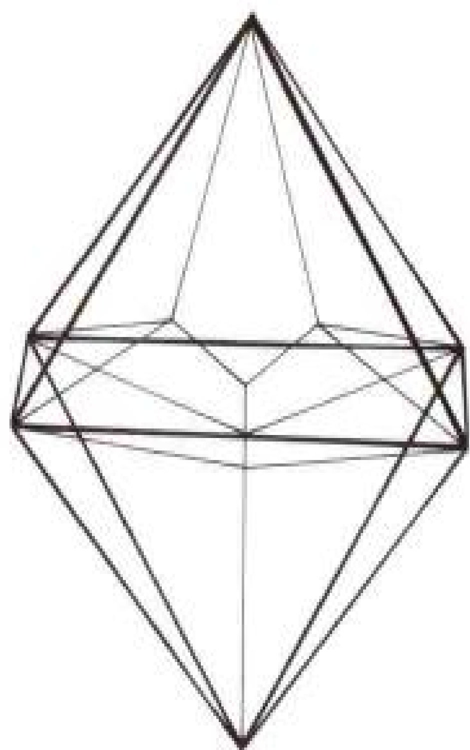
球面上可能有十种大圆网络，其中三个大圆均两两交成120°角，这里由图（a）～（j）表示．张成（a），（b），（c）图线的肥皂膜与由扩张步骤得到的曲面体系相一致；而由图（d）～（j）所示的肥皂膜系统不同于对应的称作"锥面"的"扩张实体"，此乃由始于球心，终于球面网络上的点而画出的所有光滑弧线构成．由观察得出对如下事实的"物理证明"：图（a），（b），（c）所示的锥面有极小面积，而由图（d）～（j）所示的锥面不然．对此事实也有严格的数学证明．

（a）～（j）这十种网络可大致描述如下：图（a）是一个大圆；（b）是三个半大圆；（c）是一个球面四面体；（d）是球面正方体；（e）是以五边形作为侧面的球面棱柱体；（f）是三角形外面的球面棱柱体；（g）是球面十二面体；（h）由两个球面正方形和八个全等的（球面）五边形组成；（i）由四个全等的球面正方形和四个全等的（球面）五边形组成；（j）由三个（球面）正方形和六个（球面）五边形组成．

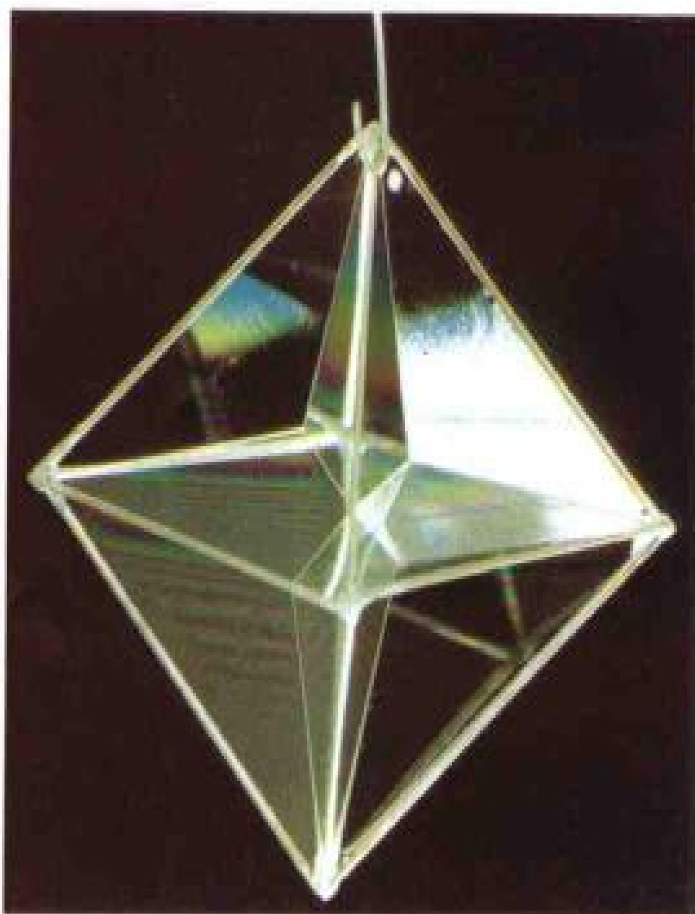
一个框架可以界定几个不同的——恰乃“真正不同的”——肥皂膜构型. 这种现象的一个十分显著的实例是采用八面体框架得到的. 覆盖此框架的不同的肥皂膜构型, 可采取以不同方式从肥皂溶液取出金属丝框架而形成; 为能在物理上完全实现, 必须做一些实验.

轻轻吹拂肥皂膜表面, 往往能改变肥皂膜的构型; 而有时抖动框架也会达到同样的效果.

以90° 和120° 角相接合的有趣原则可用来求解广义斯

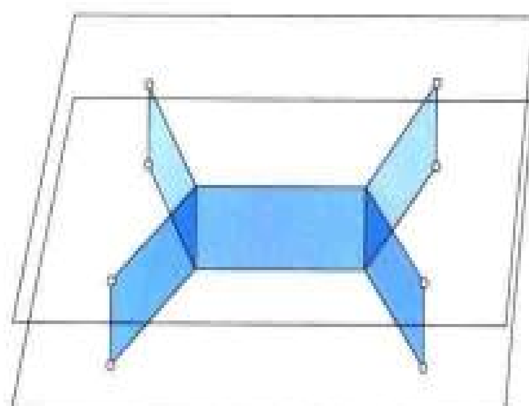


八面体内的肥皂膜: 构架(粗线)和液体边缘(细线).

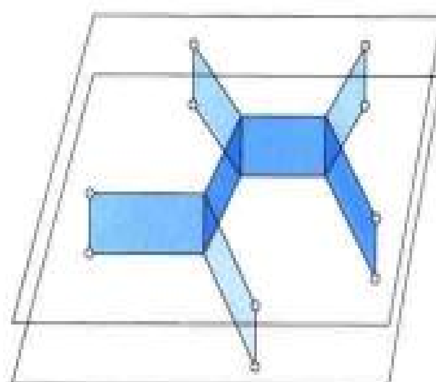


八面体内的肥皂膜.

坦纳平面问题，实验上亦利用肥皂膜予以验证．对于这个问题，且设定 n 个点，然后考察连接所有给定点、并具有可能的最小总长度的直线网络．



（a）



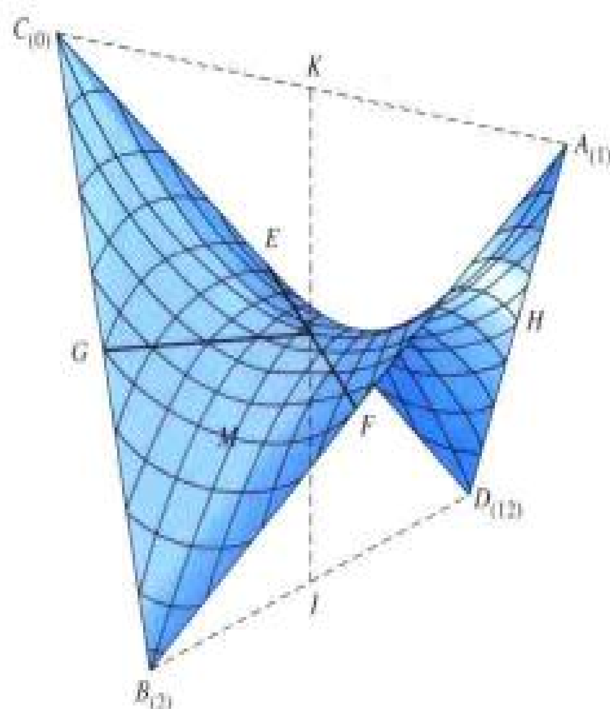
（b）

斯坦纳问题的肥皂膜解：（a）设定四个点；（b）设定五个点．

假如做一个由两块平行的玻璃板或清洁的塑料板组成的框架；二板由 n 个平行的、同样尺寸的销钉相接，销钉与板垂直相交．如果把这个框架浸入肥皂溶液，然后取出，平面肥皂膜系统就形成了．肥皂膜附着于销钉上，有两种液体边缘，都为直线．一种液体边缘粘着于玻璃板面（或塑料板面），以90° 角与板相交；因为它们是支持表面上的自由边界．另一种边缘处乃三个膜交接，形成三个120° 角（见右图）．假如再在一块板上标记这 n 个给定点的位置，并把销钉固定在这些记号上．那么，在任何哪块板上的液体边缘的子系统对给定的斯坦纳问题提供了实验解，因为这些边缘均服从于与斯坦纳解相同的规则．而且，肥皂膜系统的总面积显然等于两块板的间距乘上附着于板面之一的液体边缘的总长度．肥皂膜系统的面积为极小，所以在一块板上的边缘子系统必定为 n 个给定点之间所有联线中总长度最小的那一条．

周期极小曲面

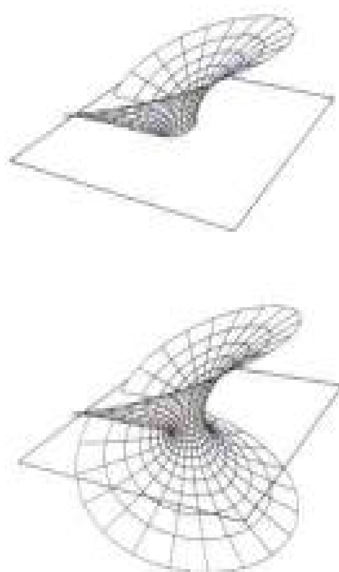
H·A·施瓦茨首先求解了并非位于同一平面的最简围线 C 的普拉蒂奥问题．C 是带有四条边缘的多边形，其棱边不在同一平面上．人们称这样的曲线为四边形折线．施瓦茨考察了一条很特殊的四边形折线：一个绕着正四面体的六条棱边中的四条的回路．他于1865年发表了研究结果，还表述了所构成的三种



等边构架内的施瓦茨曲面，这里连接配置的四条直线段界定了这个极小曲面.

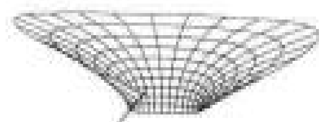
模型. 这些模型的构架由细金属丝制成，所包围的极小曲面由胶膜组成. 第一种模型如上图所示[2].

施瓦茨发现，带有处在曲面S上的自由边界的肥皂膜必与S垂直相交. 这促使他去思考如下问题: 设$<C_1, C_2, \cdots C_k, S_1, S_2 \cdots, S_l>$是一个由$k$条直线段$C_1$，$C_2$，…，$C_k$和$l$个平面$S_1$，$S_2$，…，$S_l$组成的连接结构，即所谓的*施瓦茨链*. 这确定了一个极小曲面，它在链上有一条边界，而且沿着液体边缘以90°角与平面S_1，S_2，…，S_l相交. 这类问题在施瓦茨那个时期能被明确求解. 此外，施瓦茨还发现关于极小曲面的两条重要的反射原理：极小曲面对于直线反射、对于平面反射. 这两条原理使人们由小片累积成"大"的极小曲面. 反射原理可以表述如下：

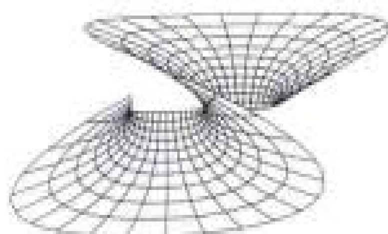


一极小曲面对于平面的反射.

[2]施瓦茨将描述了此成果的论文于1867年提呈于柏林科学院，并获得了该科学院的奖励. 这篇论文还是数学文献中的奇观之一. 甚至现代读者也会喜欢它，因为它风格优美、表述完善. 伯恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann）亦于1861—1862年求解了这个问题，但没有发表他的结果. 黎曼的学生哈特恩多夫（Hattendorff）于1866年校订了老师的手稿，并于1867年将此作为其遗著而面世.



■ **规则3** 如果一极小曲面M的一部分边界为一条直线所包含，那么M对于此直线的反射曲面M^*也是极小曲面，而且M和M^*合并起来同样成为一个光滑的极小曲面.

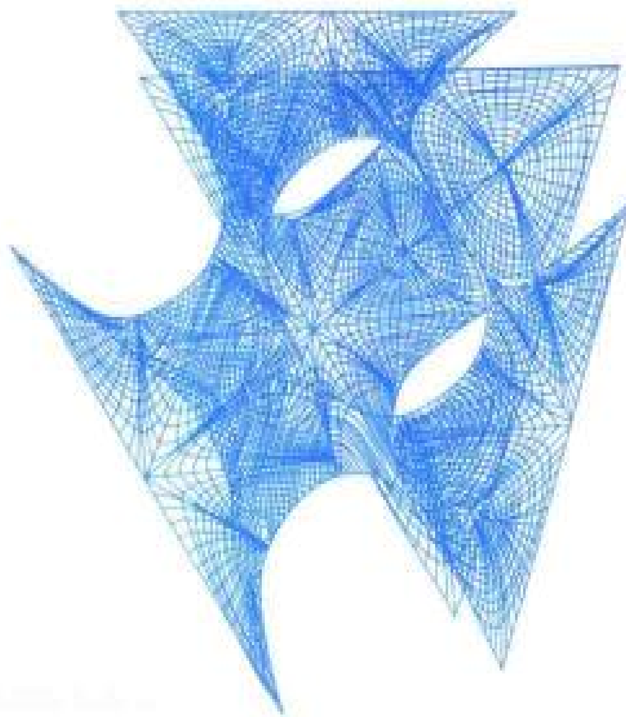


一极小曲面对于直线的反射.

■ **规则4** 如果一极小曲面M与一平面交成直角，那么M对于此平面的镜像M^*也是极小曲面，它与M一起组成一个扩展了的曲面，亦为光滑的极小曲面.

且考虑一极小曲面M，其边界含有几段、或在一些直线上，或在一些与M垂直相交的平面上. 于是，我们可以把M对于边界的每一直线段反射，也可以对于那些与M交成直角的平面反射以获得M的所有镜像. 这样便得到了新的曲面，乃包含原始曲面，即基元曲面M，及其反射曲面和镜像曲面——它们是利用规则3和规则4表述的反射原理而生成的. 新曲面是光滑的极小曲面，其边界（诸如基元M的所有反射曲面和镜像曲面的边界）的性质与M的边界相同. 就是说，边界由有限多线段组成，线段或在直线上，或在与曲面垂直相交的平面上. 我们可以继续这样的扩展步骤：可将基元的每个反射曲面和镜像曲面当作新的基元，对此继续使用这两条反射规则.

施瓦茨周期曲面的一部分.



倘若扩展过程在某一步后不再有使反射继续进行的边界，此过程便终止. 例如，如果基元是半平面，则就唯可能进行一次反射. 但可以证明：对于有限基元，扩展过程永远不会终止.

因此，我们可以设想达到“无限扩展”的极小曲面；但必然预期，这样的曲面通常是自相交的. 唯有很特殊的施瓦茨链，以它为


(a)


(b)


(c)


(d)

(a)~(c)施瓦茨第二周期极小曲面，由阿兰·舍恩制成其模型.(d)阿兰·舍恩与他所制作的回旋形曲面(乃另一类周期极小曲面)模型.

基元，才导致一个无自相交的无限扩展极小曲面．如此实体称为周期极小曲面.

早在1867年施瓦茨就指出，张成如第198页的上图里四边形折线的(唯一确定的)极小曲面是一个周期极小曲面的基元.

施瓦茨和其他作者找到另外一些周期极小曲面，其中一部


(e)


(f)


(g)

（e）舍恩的回旋形曲面模型.

（f）回旋形曲面的多面体近似.

（g）一周期极小曲面，每个基本区域里曲面的亏格为29（此曲面亦为舍恩的模型）.

分如上面的照片所示．照片所示的这些模型由美国物理学家阿兰·H·舍恩（Alan H.Schoen）于1968—1969年设计和制备的.

周期极小曲面及其有关结构或许使生物学家感到兴趣．他们注意到，在棘皮动物（海盘车、海胆及其相近动物）的（内）骨骼里，其有机物质和无机物质之间的分离层像是某些类型的周期极小曲面.

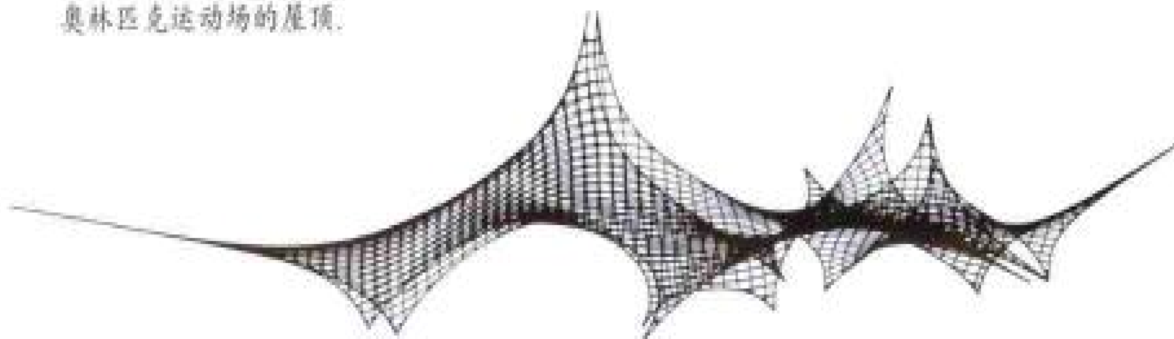


奥林匹克露天运动场(慕尼黑，1972年)内景.

作为屋顶和帐篷的极小曲面

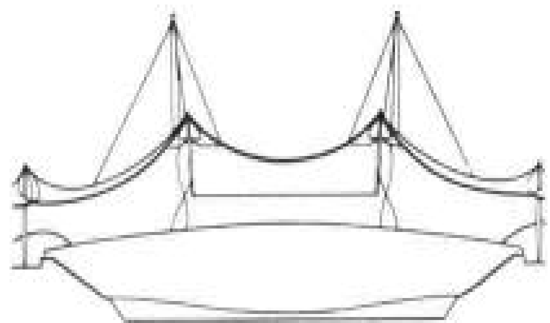
在过去三十年间，建筑师弗雷·奥托(Frei Otto)及其合作者们的精巧建筑结构理所当然地走红．他们的建筑物，与其说是传统意义的建筑，倒不如说更像帐篷式的结构．例如，1967

奥林匹克运动场的屋顶.





奥林匹克体育场（慕尼黑，1972年）外景.

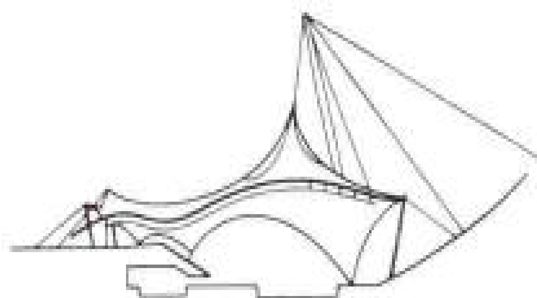


奥林匹克体育场的屋顶.它包含5个极小曲面的主单元、8个眼孔单元、2个悬挂点、2个中心辅助点、8个支撑点、29个锚定点.最大跨度为443英尺，最大高度为180英尺.

年在意大利的蒙特利尔举行世界博览会，其德国展馆乃由弗雷·奥托和罗尔夫·古特布罗德（Rolf Gutbrod）所设计，颇像一道神秘莫测的风景线，它由高度不一的单个膜片组成. 膜的周边由柱杆支撑在高点处，而在低点处则被锚定在地面. 预先伸展了的膜（用透明物质制成）由一个钢丝网支撑着，通过边缘钢索、窄钢条、眼孔构成的一个系统，与柱杆顶、锚定点相连接. "眼孔"（下文将说明其重要性）里充以透明的胶状物质.

另一著名佳构乃慕尼黑的奥林匹克露天运动场的屋顶. 这也是一个类似帐篷式结构，系由马鞍形网组成，带有两个悬挂点、两根支撑杆、各式各样的锚定点和一个长度为1443英尺的正侧面边缘钢索. 网被半透明的聚丙烯膜覆盖. 钢柱高190英尺. 这屋顶的最大跨度为213英尺. 而奥林匹克体育场以及奥林匹克游泳池的屋顶结构与此亦属同类.

帐篷与弗雷·奥托的屋顶之间相类似并非偶然. 二者满足



奥林匹克游泳池（慕尼黑，1972年），其屋顶是一极小曲面，它附有1个悬柱点、13个竖固的锚定点．最大跨度为279英尺；最大高度为164英尺．

几条共同的结构原理．第一，设想都是重量颇小的结构，都设计成经济实用的结构，采用尽可能最少的结构材料．第二，二者都设计成易于竖起、易于拆卸、易于转移的结构．第三，对于屋顶的主要作用力是拉伸应力；只有少数部分，诸如柱杆、支撑锚钉受到的是压力．（拉紧的绳索和绷紧的帐篷里的乃是应力，而柱子、墙壁里的则是压力．）

因此，帐篷和轻屋顶与最传统的建筑物的主要不同在于，后者的材料用量一般与其实际所需的负荷量不成比例．要把通常



奥林匹克游泳池外景．

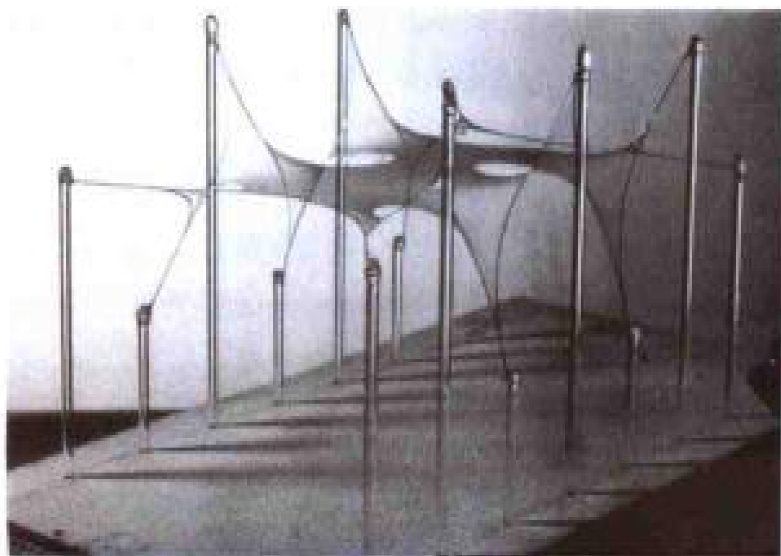
的建筑物迁移到别处，不可能没有重重困难．大部分建筑材料，诸如石头、砖块能承受压力，而非应力．为对付弯曲力和扭曲力，采用大量额外材料，从而导致不可避免的损耗和不必要的花费．

读者已经明白，自然界提供探索在给定围线以内曲面之最佳形状的便利方案：恰好使肥皂膜可能张成所设定的边界构型．若此肥皂膜不易破裂，它乃处于稳定平衡状态，是面积为极小

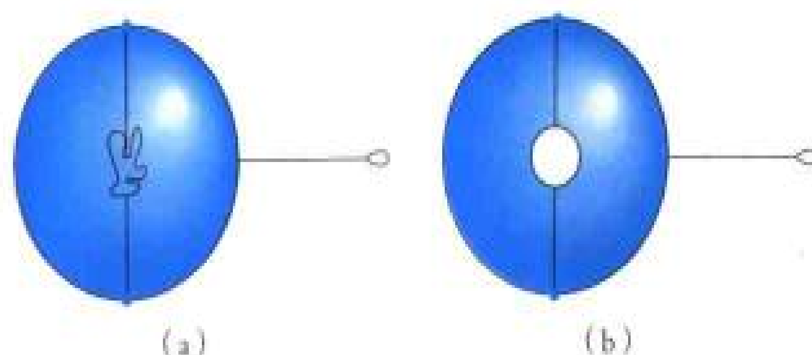

奥林匹克游泳池外景.

的极小曲面. 弗雷及其合作者们将肥皂膜用作其建筑设计的主要工具. 他们做了大量肥皂膜实验，以寻觅其优美形状而转化成实在的建筑物. 大部分实验基本上为普拉蒂奥和其他研究者所已知；但弗雷·奥托对于肥皂膜的支持边界之几何设计机敏地变化，从而得出一些以前未曾想到过的美妙的新形式.

弗雷·奥托在其实验中所采用的材料为毛发-细丝，系于针或细杆的端点，针或细杆钉在有机玻璃板的孔洞里（见下面


由一细丝系统界定的肥皂膜.

圆盘型极小曲面上的细丝：(a)细丝未曳紧；(b)细丝曳紧.



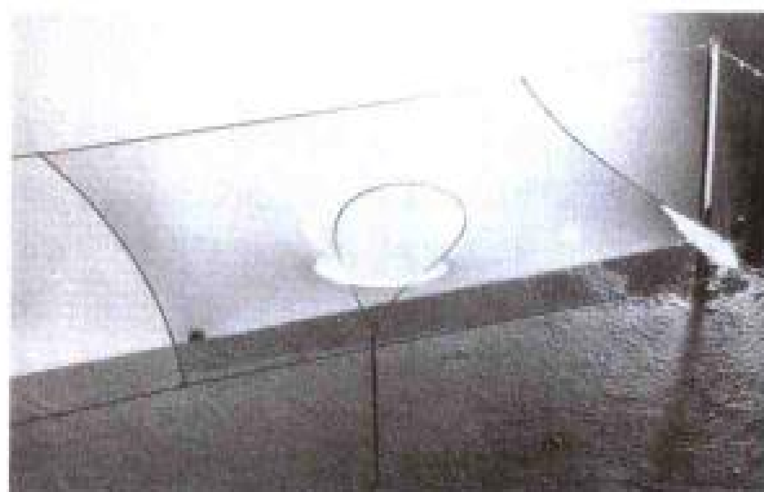
的照片）. 如果将此构型浸入肥皂溶液，再取出，肥皂膜达到其面积为极小的布局，以致使细丝曳紧. 把细丝系于针的不同高度，则便形成类似帐篷那样的奇妙状态.

为了把这些肥皂膜模型转化成建筑形式，就必须将此模型仔细地摄下相片，并认真地测试. 于是得做成坚固的模型，并将其置于风洞里试验. 特殊的测试方案乃进行有关应力的实验，应力会在风吹雪打时产生. 那么，在实用结构里，要以高强度的细钢索取代肥皂膜模型中所用的毛发–细丝；薄膜则以合成纤维织物为材料.

可通过如下步骤见到非常有趣的美妙现象，对此你自己能方便地实现. 取一金属丝呈平面曲线状，接上一手柄；将金属丝浸入肥皂溶液，再移出，则就形成一（平面）肥皂膜. 然后取一团细丝圈置于肥皂膜，细丝置放处发皱、并无应力. 你用圆头的细杆，便能弄破细丝圈内的肥皂膜，但并不损坏圈外的膜. 肥皂膜会减小其面积，故而将细丝曳紧，使其呈圆形（见上图）. 以此方式形成的圆又如下一页的上图所示. 由此图看到：那细丝并非用直线条与外面的曲线相接，但细丝上有一点P靠在固定于基面的针杆上. 倘若把针杆按得低些（见下一页的第二幅照片），细丝就被曳离平面位置，变成空间曲线；显然，此乃一条很光滑的常曲率曲线，除了附着于针杆的P点以及细丝圈缠绕的部分以



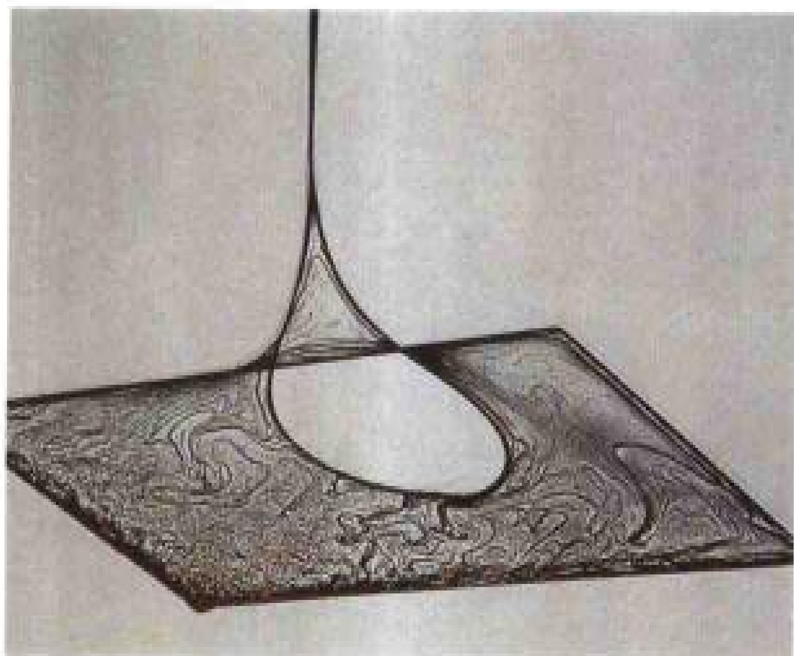
由圆形细丝界定的极小平面图形.



在垂直方向的应力作用下的细丝（被拉向下方）.

外. 肥皂膜以外面的围线为边界. 而这里的"眼孔"不在一平面内，其弯曲势态为后来所使用的建筑结构提供了一种可能的稳定形式. 例如，第209页上的照片表示，在斯多加的弗雷·奥托研究会会馆是如何设想出来的. 在其模型里，外面的围线由系于针杆的细线张成，针杆都嵌在一平板内. 上部像是一个吊架，乃一根支撑系附肥皂膜的圆圈. 而在建筑物里，钢索替代模型里的细丝，孔内充以透明的胶状物质. 底层上的窗户亦然，从而让日光晒入内部.

向上曳引的细丝形成的一个“眼孔”.



现在能容易地理解弗雷·奥托的设计和构造原理，他将这些原理用于建造慕尼黑的奥林匹克运动场的屋顶以及蒙特利尔的德国展馆. 人们从那里看到支撑用的柱杆有几个（取代单个吊架），以致眼孔亦有多个. 除了吊架眼孔外，还有其他的支撑组件，诸如脊梁、驼峰、绳索（见第210—211页的图所示）等，也都是要用到的.

众所周知，亦容易验证：可以用钝物（诸如手指）挤压肥皂膜，但不能用针去碰，针会将膜刺破. 反之，用锋利小刀的边缘或细丝却能将膜挑起. 于是产生这样的问题：什么物体可用于升高肥皂膜；该物体与肥皂膜接触处的点的集合实际上看来是怎样的重合之集合？

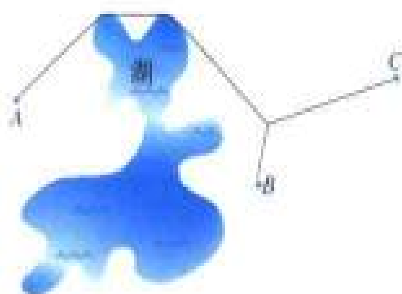
这类问题称为障碍（物）问题，其探讨已成为数学研究的一个重要而富有成效的领域，已促使其发展出变分法的许多新颖而有趣的技巧. 显然，探讨这样的问题很有实用意义. 例如，我们计划用一个其总长度最短的道路系统将几个城市连







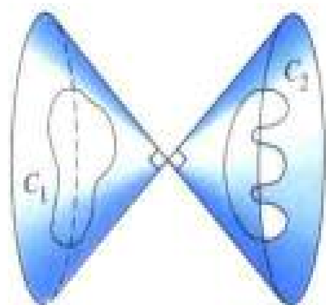
斯多加的轻结构会馆：左上，模型；右上，网系统；下，竣工后的建筑



斯坦纳问题的推广：一个带有湖泊的风景区里的极短道路系统.

接起来，但道路须绕开一些湖泊、山区、国家公园，那么我们就面临着斯坦纳问题的推广，必须计及障碍（见左图）. 原来，求解在这样的辅助条件下的最优性课题乃是应用数学的最重要的问题之一. 而一旦考虑带有一段自由边界的极小曲面，便遇到另一类障碍问题.

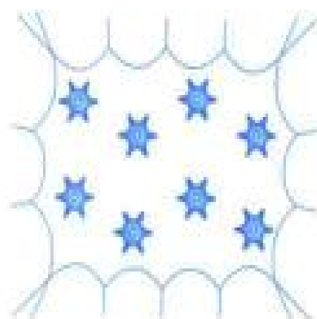
许多与弗雷·奥托或“细丝”实验有关的问题已在实验上解决，但在数学上尚未得解. 譬如说，若凭借眼孔将肥皂膜升高、超出其平面围线，则膜能达到怎样高度的最高点（见下一页的上左图）？假如两条曲线 C_1 或 C_2 离得太远，它们就不能由一个连接肥皂膜所张成. 其实，倘若 C_1 和 C_2 可能被一个圆锥面隔开（见左图），这两条曲线就不可能作为这样一个极小曲面的边界；而圆锥面乃由两条交成直角的直线绕着一条对称轴旋转而形成. 如果给定眼孔框线的长度和外围线 C 的位置（见下一页的上左图），便易于导出极小曲面的超出其基面的上边界的高度；诚然，找到其最大高度的实用价值才是有意义的.



两个圆锥面给出一个不实在的结果.

还可以将几个孔眼框线连接于同一点（见下一页的右中

由轻建筑物的结构单元形成的障碍问题.



驼峰（俯视）



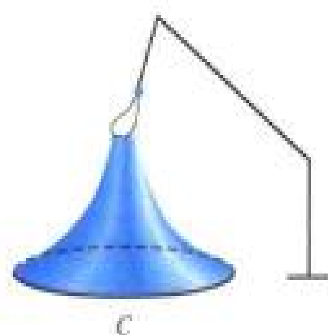
脊梁



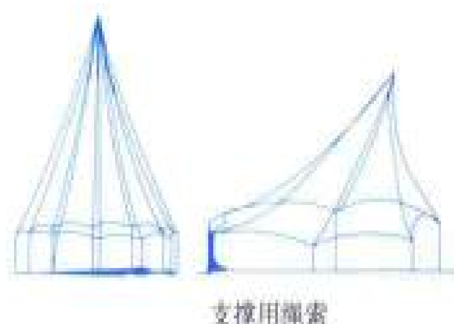
脊梁

脊梁

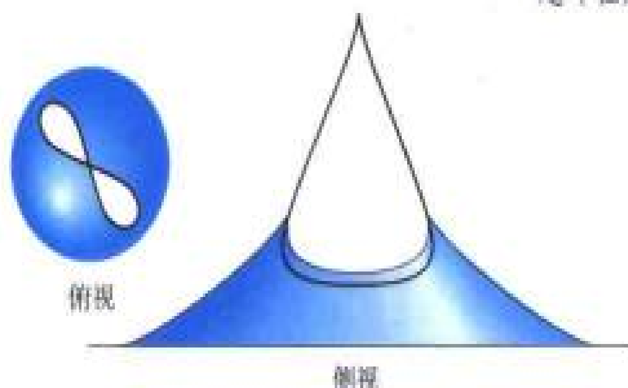
驼峰（横截面）

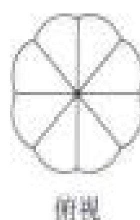


眼孔能将肥皂膜提升到怎样的高度？



由绳索支撑着的极小曲面，此乃障碍问题（轻建筑物的结构单元）.



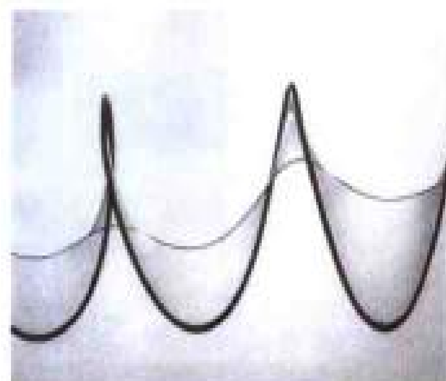




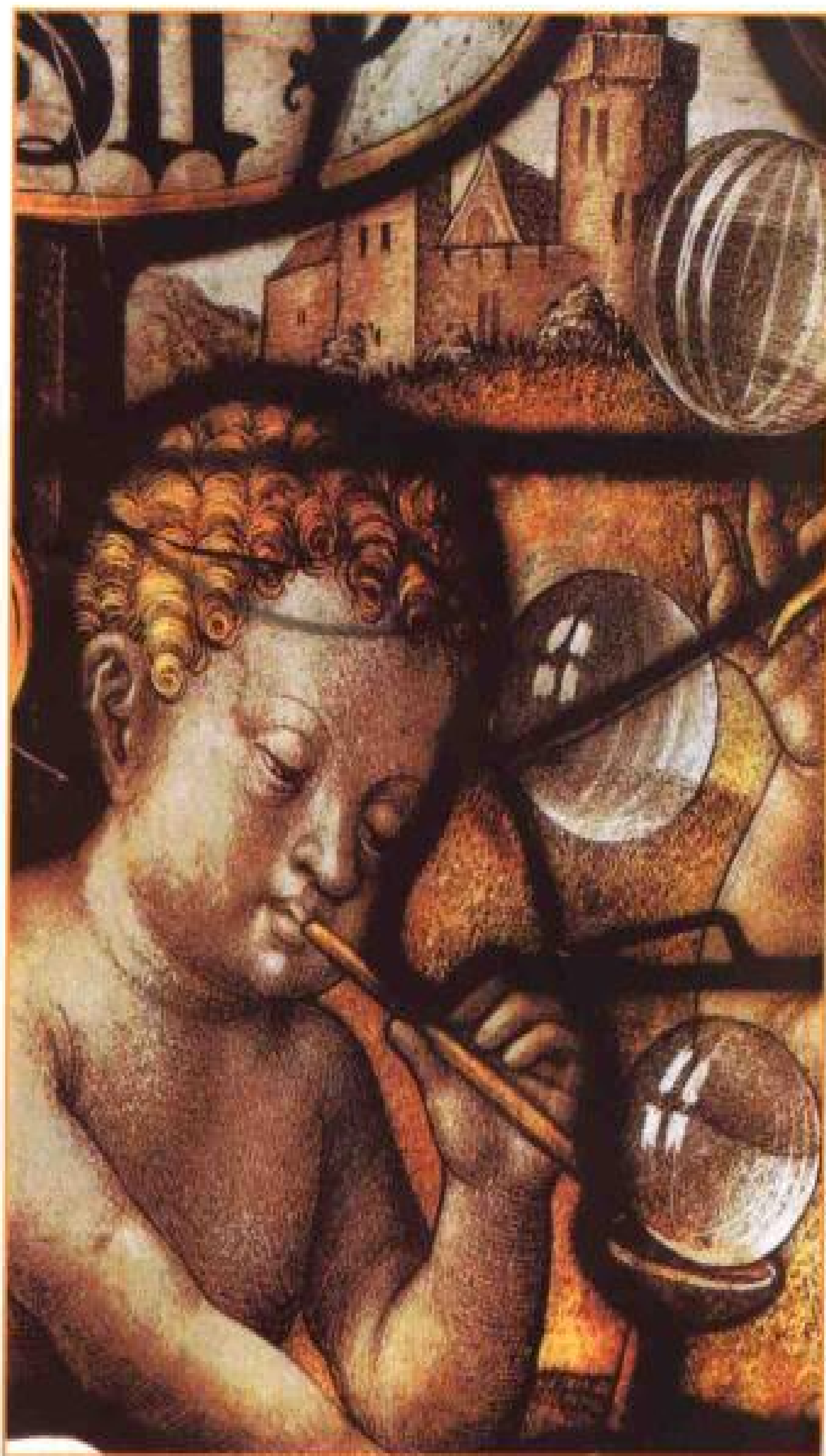
带有几个连接于一点的眼孔的极小曲面.

图），或者使一条细线固定于一条给定圆弧的端点. 那么，肥皂膜乃是以其面积达到极小的方式张紧此细丝的；并且，细线会成为一条与C不相接触的常曲率曲线. 右下方的照片表示一肥皂膜，其一部分边界为螺旋线形状的金属丝，一部分边界为系于螺旋线的某些点的细线.

在本章中，读者已经逐渐熟悉液体薄膜的各种几何形态和拓扑型式、以及关于液膜的表面张力与其边界构型之间相互关系的一切结论. 看来令人颇为惊奇的是，毛细作用现象会产生如此多样的形态，即使以最简单的表示形式亦然，肥皂膜的形态就十分丰富. 下一章我们将研讨当对肥皂膜的一侧加以空气压力后所发生的现象，然后再将注意力转向其他某些平衡态构型，特别是液体的构型.



带有细线的螺旋形金属丝.



一玻璃镶嵌画（科伦，约1530年）——画面为两个男孩在吹肥皂泡——的片段．瓦尔拉夫（Wallraf）收集，藏于科伦的施尼特根（Schnütgen）博物馆．此画表示古代一个俗词“人泡”（“homo bulla”）（像气泡一样的人），这个词被伊拉斯莫斯（Erasmus）收入他的《谚语》——一本谚语选集中．

6

最优设计



等周问题

公元5世纪，希腊哲学家普洛克勒斯（Proclus）写道："圆是最基本、最简单、最完美的图形"；圆的完全对称性表明此论断是正确的．这恰如黛朵女王所发现的美妙性质——在所有等周长的平面图形中，圆（亦即圆盘面）的面积最大．圆的这个性质称为圆的等周性[1]．

[1]此词源于希腊语；意指这样的事实：对于所考察的图形，其围线具有相同的测量值，即相同的长度．

自然界不做无用之事，只要少做一点就成了，多做了却是无用；因为自然界喜欢简单化，而不爱用什么多余的原因去夸耀自己．

（伊萨克·牛顿：《自然哲学的数学原理》）

我们用另一种对偶的形式说明这一引人关注的事实，即用极小性质取代极大性质以表示圆的特征：

在所有等面积的平面图形中，圆盘面的周长最小.

为了从黛朵女王有关圆的极大性质导出其极小性质，引入一个十分有趣的不等式. 为此目的，且考察一条其周长为L的任意闭合曲线C. 设C围成一个面积为A的区域，并令r是一个其周长为L的圆的半径；那么，$L=2\pi r$. 如此圆周围成一个圆盘面，其面积为πr^2. 依据圆的等周性，被曲线C围成的面积A不可能大于πr^2；当且仅当C为圆周时A等于πr^2. 而则，

$$\pi r^2=\frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2=\frac{1}{4\pi}L^2.$$

于是得到有名的等周不等式：

$$A\leqslant\frac{1}{4\pi}L^2.$$

这表明任意平面曲线C的周长L与由C围成的面积A之间的关系，唯当C为圆周时才取相等记号. 由这个不等式容易得出：在所有等面积的平面图形中圆盘面具有极小周长. 为看清这点，且考察一个其周长为L、面积为A的任意平面图形. 令D是具有同样面积A和周长l的圆盘面；则有$l^2=4\pi A$. 由此得出$L\geqslant l$，因为$L<l$即暗示有不等式$L^2<4\pi A$，这就违背等周不等式. 实际上，圆盘面的“极小”特征和“极大”特征是圆的等周性的两个等价表示形式. 此极小性质也可用来解释为什么肉汤面上的油滴呈圆形，而非三角形或六边形. 对于一定数量的油，其中的分子力产生其周长为最小，亦即其势能为最小的图形，这便是圆盘面. 如果两油滴漂浮而相遇，则很快就合并成一个大一点的油滴.

并不奇怪，圆还有一些其他最优性质．例如，在一切面积给定的平面区域中，圆盘面能支撑起最大的沙堆．这一点对于你的儿孙们很有用，倘若他们喜欢堆沙建"城堡"的话．

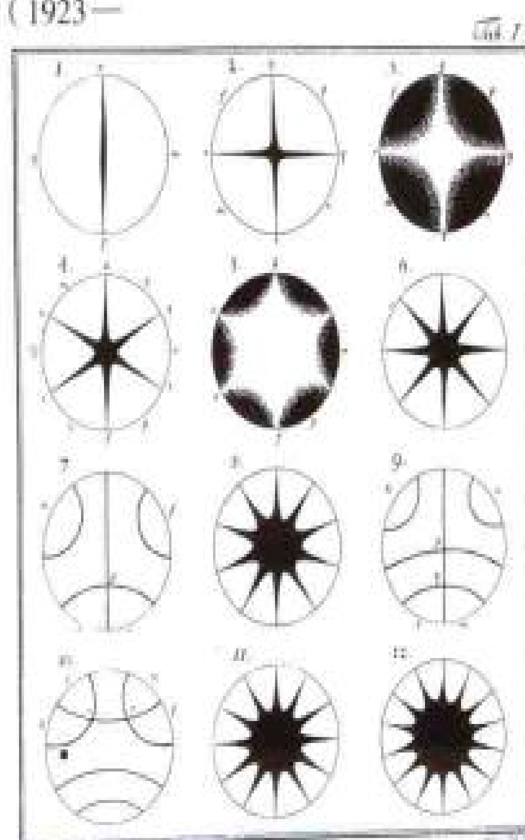
塑性力学理论中有一个类似的问题：能承受最大扭力矩（即最大数量的扭转）的完美弹性柱体的横截面呈何形状？同样，横截面必为圆形．

圆盘面的另一优美性状乃由英国物理学家洛德·雷利夫（Lord Rayleigh）观察到．这涉及由膜片产生的乐声（例如打鼓）．如你所知，可以通过增大膜片的尺寸（增大其面积），来降低其主频率．那么，你或许乐于了解：在一切面积给定的平面振动膜片中，怎样的膜片具有最低的主频率；也就是说，在一切具有给定的横截面积的鼓中，哪一种鼓的声调最低？雷利夫于1877年由实验推测，圆形膜具有极小性质；但几乎过了半个世纪，这个推测才由法贝尔（Faber）和克拉恩（Krahn）予以证明（1923—1924年）．

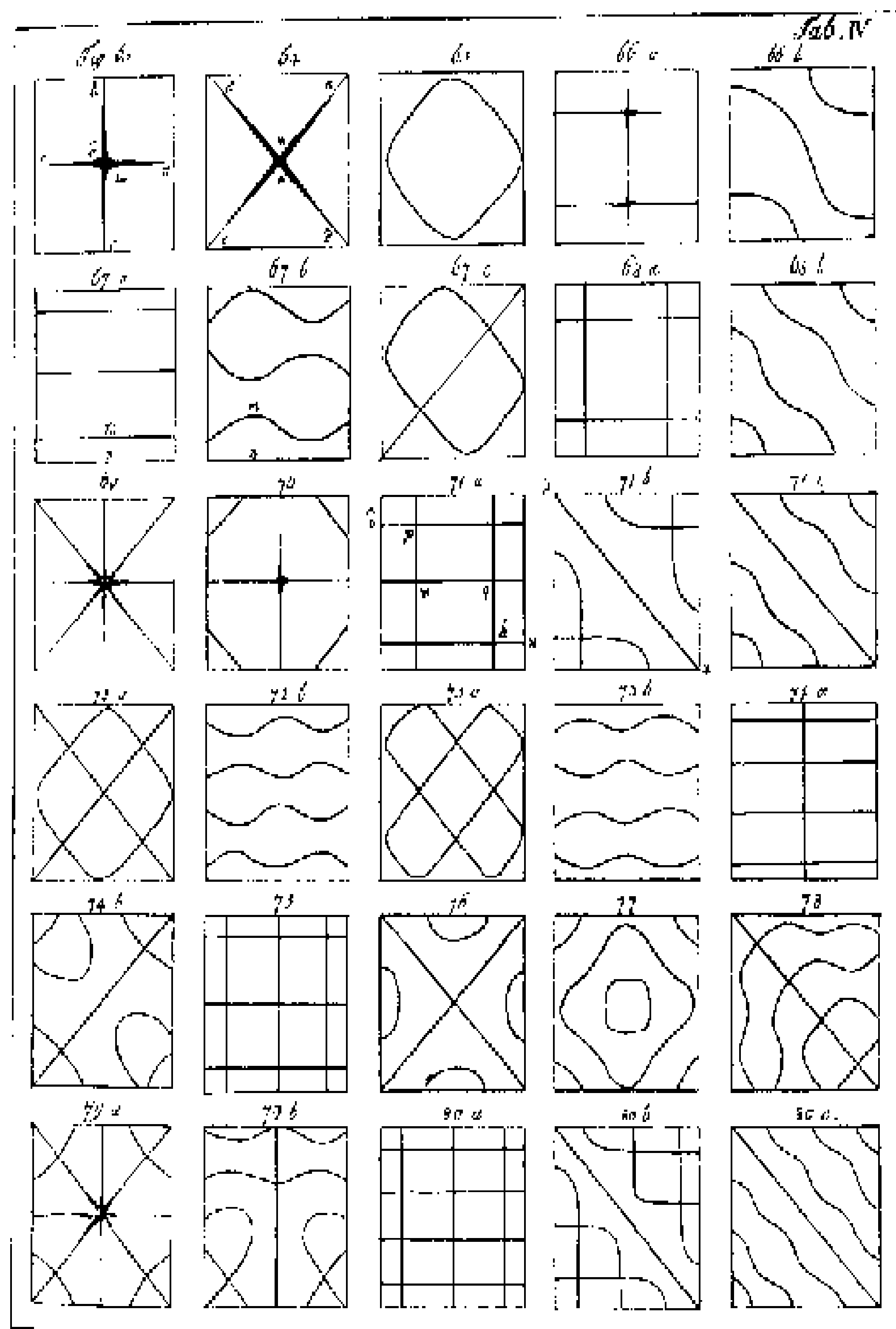
对于其边界被"卡住"、亦即被某种器具固定了的金属板（诸如铙），下述类似的论断得以证实：

> 在一切具有给定面积、卡住了的板中，圆形板的主频率为极小．

事实上，声学的这个领域提供了变分法的许多其他有趣的应用．我们甚至可以说，纯声调理论，亦乃

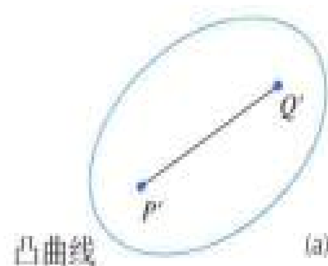


振动的板和钟罩的克拉尼图［这些图版取自克拉尼（E.F.F.Chladni）《关于声调的理论探索》，莱比锡，1787年］．一些板被水平地支撑着，另一些板被卡住；而图3和图5显示钟罩内水的运动情况．



克拉尼是声学的创始人之一，他的著名论文“声学”于1802年发表。克拉尼把细沙铺在被卡住的金属板或玻璃板上，然后使小提琴的弓接触板的边缘，那么沙粒就聚集在一些地方不动，从而形成节线。要从理论上预言任意板上节线的尺寸和形状，仍然是一个基本上不得解决的问题。因此，乐器（诸如小提琴）的设计和制造乃是艺术，而非科学。

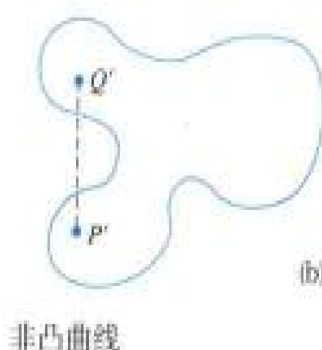
毕达哥拉斯物理学的那个实在领域，不过是变分法的分支领域罢了.



凸曲线

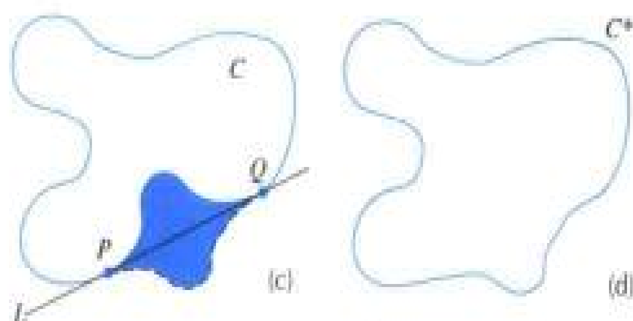
对于圆的等周性的拟证

然而，读者还未看到对于圆的等周性的证明；所以，让我们考察一下雅可布·斯坦纳于1836年给出的论证.



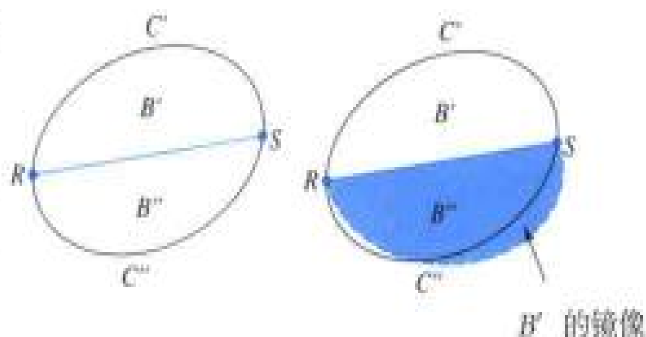
非凸曲线

且假定等周性问题的解是存在的，于是在其长度给定的所有闭合曲线中，有一条曲线C包围最大面积. 读者或许希望证明这条曲线是圆. 首先注意到，这条曲线是凸曲线；就是说，联结该曲线C内侧任意两点P'和Q'的直线段全部在C线包围的区域内[试比较右边的图(a)与图(b)]. 再则，如图(c)所示，曲线C或许位于通过C上两点P和Q的直线L的一侧，那么L上P, Q之间的那些点并不属于C. 于是如图(d)所示，我们可能构建一条新曲线C^*，它所包围的面积比C所包围的面积大，但二者的周长相同. 然而，这与C线包围最大面积的假定相抵触；因此，作为等周性问题的解的曲线必定是凸曲线.

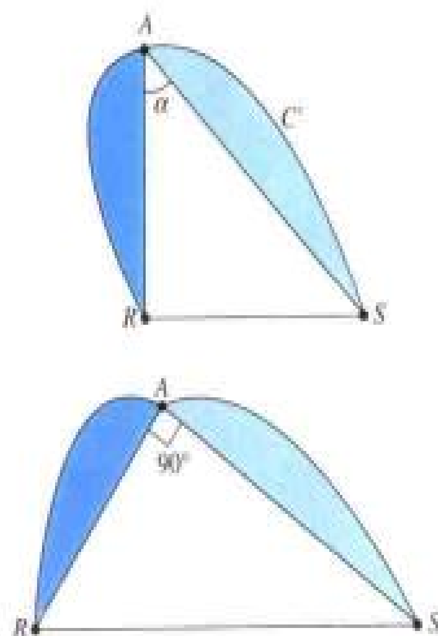


如果C不是凸曲线，则对于直线L作反射，便生成新曲线C^*，如图(d)所示. 尽管新曲线与曲线C的长度相同，但新曲线所包围的面积大一些.

接下来，我们在凸曲线C上选定两点R和S，把C分成两条等长的弧线C'和C''. 通过R和S的直线把C的内部切割成两片B'和B''，如右下图所示. 曲线C的最优性暗示B'和B''有相同的面积；这一点可由下述看出. 譬如说，假定B'的面积比B''大，那将区域B'对于直线段RS作反射，便会得到一个新区域——乃是B'的镜像. B'与其镜像相并合，则组成一个面积比C的



B'的镜像



采用机械方式的讨论完成对圆的等周性的证明.

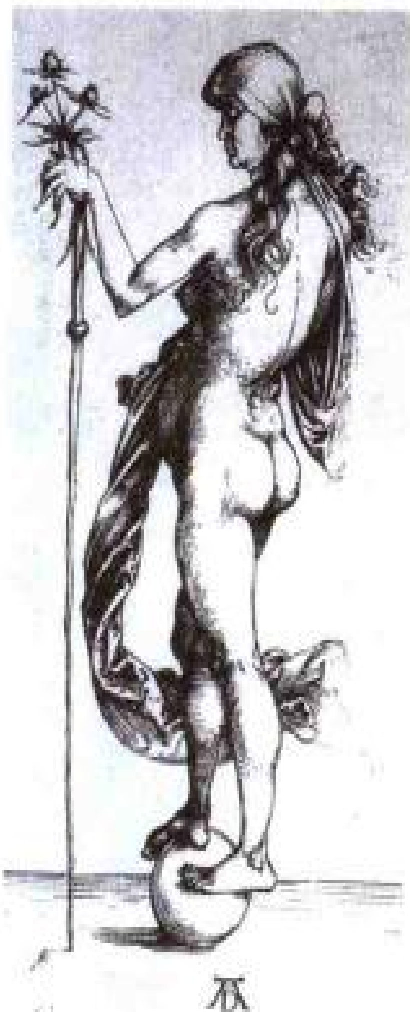
内部大的图形，但其周长与C的长度相等. 然而，这与曲线C的最优性假定相抵触；所以，B' 和B'' 的面积必然相等.

为证明C是圆，只要证明C' 和C'' 是半圆即可. 我们再一次用反证法来证明. 假定两条弧线中的一条——譬如说C'——不是半圆. 泰勒斯所提出的经典定理暗示：在C' 上有一点A，即三角形RAS的角隅点A的角度 α 并非90° ，且设想：三角形的两边AR和AS可凭藉置于A点的铰链而移动，那么绞接处的角度可减小或增大；并且，左图中着色部分表示的两个月牙形紧紧附着于绞链的双臂，于是月牙形随着双臂一开一合而移动. 我们把绞链的双臂张开，绞接处的角度从原先的 α 变为90° ，从而使三角形RAS的面积增大（显见，两月牙的尾端两点R和S的位置与原先不同，倘若这把带有活动关节的“剪刀”的张开角度改变的话）. 与原先A点处的角度为 α 时相比，带着月牙形的这个新图形的面积大一些. 但我们已知，原先的图形是曲线C的内部区域的一半. 因此，要是将新图形对于通过R和S的直线作反射，并将新图形与其镜像相并合，则便得到一个与C等周长但面积更大的区域. 这是不可能的. 所以C' 必须为半圆. 同样可说明C'' 也是半圆，故而C是一个圆.

这样就已证明，圆是等周问题的唯一的解. 对斯坦纳而论，此问题解决到这样的程度. 据说，他的同事狄利克雷（Dirichlet）试图使他相信，他的证明是不完备的；但没有成功. 我们已经明白，凡合理的几何问题，其解的存在性绝非一目了然；其实，有时解甚至可能并不存在. 然而，等周性问题之解的存在性能予证明. 那么，在一切等周长的闭合曲线中，包围最大面积的唯一的一条曲线正是圆. 我们不予表述这个存在性证明过程，因为这超出本书的范围. 因此，上述对圆的等周性的证明还不完备，故而只是一种“拟证明”罢了.

球和气泡

在数学家看来，球体是其表面为球面的实心体．此乃从不同侧面看来都同样是完全滚圆的物体．均匀球的几何中心与其重心相重合．所以，这样的球体的平衡位置总是不确定的．它可以静止在一切位置上；而无论朝哪一个方向轻轻一碰，都会使它滚动．并且，总不能肯定它沿哪条路径滚动，因为地面若稍有不平，就会使它转向．所以说，球成为善于机变的命运女神的象征之一．"她甚至被人们那么恶言诽谤．人们理当赞美她，却反过来给她以恶名声．然而她不在乎，听而不闻．她用其他原始的被造之物取乐，转动着她的球，欢欣至极．"（但丁：《神曲·地狱篇》第七歌："贪吝者和浪费者"）．

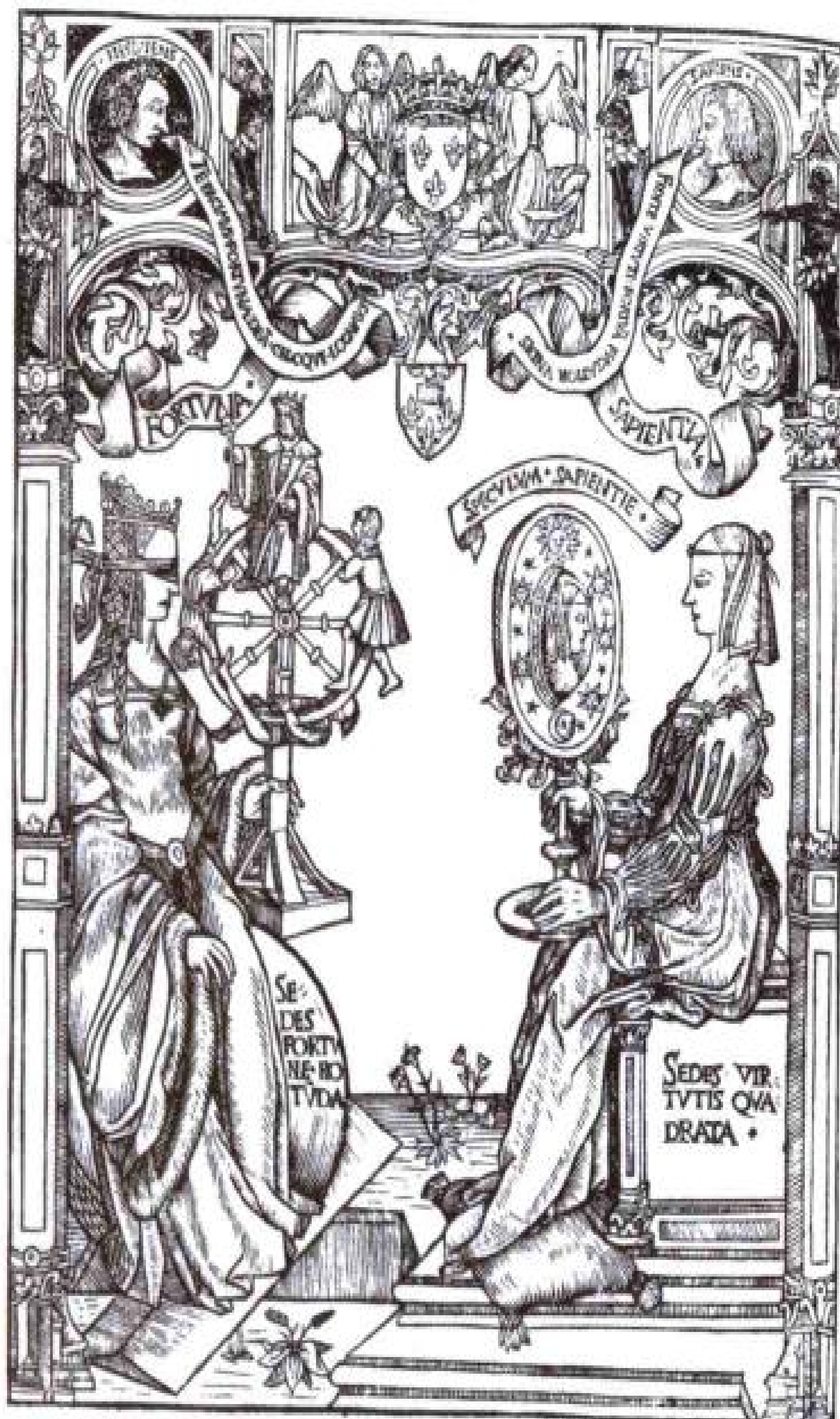


阿尔布雷希特·丢勒（Albrecht Dürer）所绘"小小的运气"．

短暂运气的另一个记号就是肥皂泡．此轻巧之物——只要维系得住——便是伯努利虚功原理的推理结果．我们已经提及，虚功原理要求平衡态的势能为极小．在肥皂泡里，若干数量的空气被面积为极小的曲面，即肥皂膜包围起来．这是下述数学定理——*在所有给定体积的立体中，球的表面积最小*——的物理证据；显然，此结论乃圆的极小性——在所有给定面积的平面图形中，圆的周长最短——的立体类比．

因同样的缘由，密度均匀的液体上悬浮的油滴呈完美的球状；这可凭经验了解，其相应的数学定理已予严格的证明．

1919年，瑞典数学家托尔斯顿·卡勒曼（Torsten Carleman）证明：球形是液体在自引力作用下静止时的唯一平衡形态．依照牛顿定律所预言的，对于大质量物体，其巨大的自身吸引力作用与诸如表面张力等其他力相比，乃占据优势，其他力便可



美德女神的平整宝座和命运女神的球形宝座，此木刻画取自夏尔·德布埃勒斯（Charles de Bouelles）:《歌剧》，巴黎，H.斯特凡努斯（H·Stephanus）,1510年。



"肥皂泡".此画由让·雅克·德布瓦西厄(Jean Jacques de Boissieu)制版(1799年).

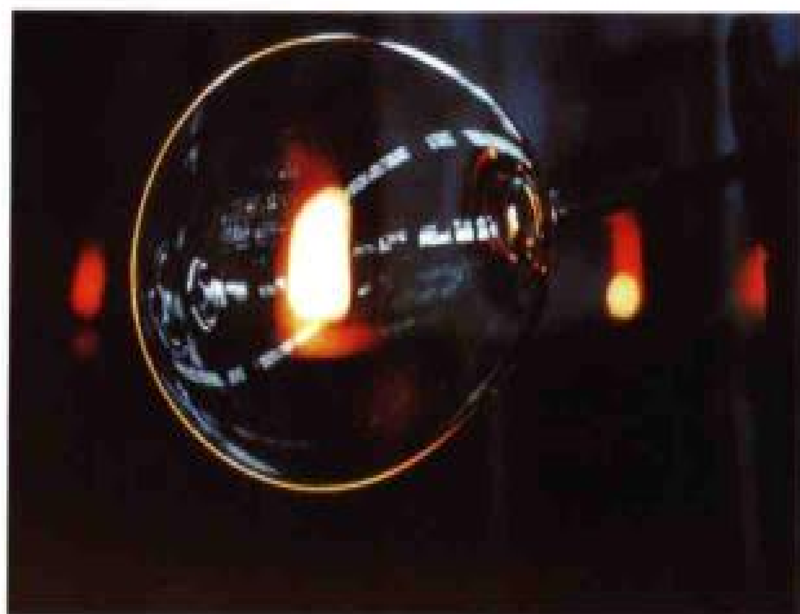
忽略不计.我们假设，行星起源于液态物质，当它们冷却后凝固.故而，球状是行星静止时所能达到的唯一形状.但倘若天体——例如地球、其他行星及其大部分卫星——在旋转着，情况则就不同；这在下文再予讨论.

回想一下：半径为r的球体，其体积$V=(4/3)\pi r^3$，表面积$A=4\pi r^2$，由此得出关系式$36\pi V^2=A^3$.于是，我们可采用类似于对等周不等式的证明过程的论证方式，导出任意立体的体积V与其表面积A之间的不等式

$$V^2\leqslant\frac{1}{36\pi}A^3,$$

其中的等式仅对球体成立.此估算式是等周不等式的立体变形.因此，与圆相类似，便得出关于球的极大性质的下述结论：

吹玻璃



在一切具有指定表面积的立体中，球的体积最大.

我们可添加一些稳定边界条件，把寻求包围指定体积、而其面积为最小的曲面这样的问题予以改变. 例如，可考虑如下

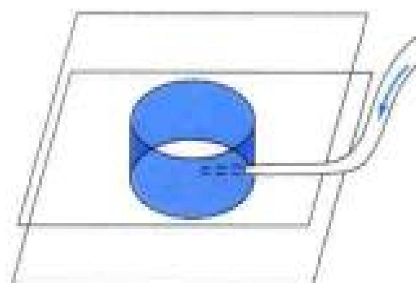
三个具有同样边界围线的肥皂泡.



问题：寻求具有指定表面积、而其体积最大的立体，并且它的一部分与某一给定平面相接触的边界尚未计入．其答案就是半球，可利用反射方法加以证明．

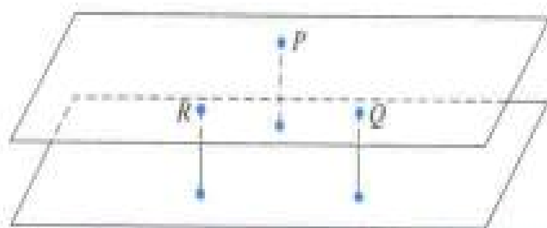
下面的问题与此密切相关．设有一个实心体嵌接于两平行平面之间．此物体减少的表面积并不涉及位于两平面上的表面部分的面积．若减少一定数量的表面积，则嵌入两平面之间、其体积为最大的实心体是怎样的形状？等效地说，体积一定、而表面积尽可能减到最小的嵌入体呈何形状？

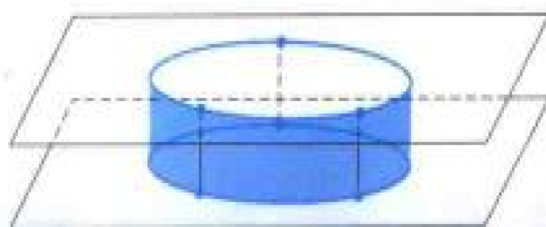
可通过在两块湿玻璃板之间吹肥皂泡的实验求解这个问题．我们从一个置于湿玻璃板上的半球形肥皂泡着手．向泡内吹气，泡增大，一旦触及另一块板，泡便变成圆柱面；圆柱面垂直地置于两块板之间，与板交成圆周线（见右图）．那么，依照与求斯坦纳问题之"实验"解相同的推理方式可得出结论：圆是包围给定面积的最短曲线．我们已说明，这个事实等价于圆的等周性．

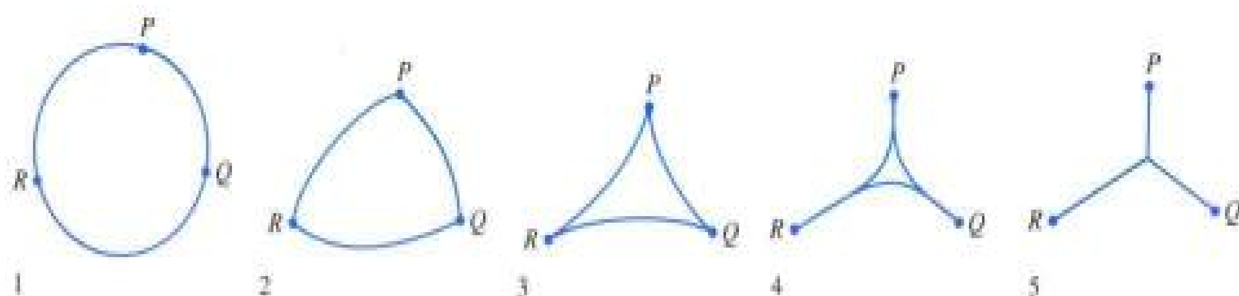


显示圆的等周性的肥皂膜．

可以通过一平板实验证实斯坦纳问题与等周性问题之间的有趣联系．假定有两块玻璃板，用三根等长的销钉连接，销钉平行地置于两块之间，且与两板垂直相交．然后，用一根麦秸在这两块湿玻璃板之间吹出一个圆柱形肥皂泡，将三根销钉附着于膜上，见下图所示．







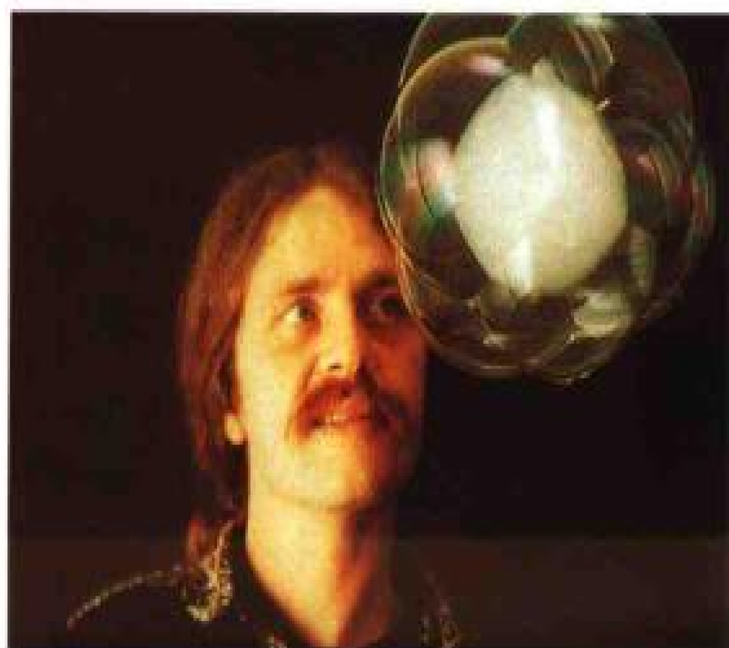
两板之间的圆柱形肥皂泡，两板由三根等长销钉隔开；此现象显示斯坦纳问题与圆的等周性之间的相互联系.

再从这肥皂泡慢慢地把空气抽出. 柱形渐次改变其形状，最后成为三肥皂膜系统，与两块玻璃板垂直相交. 在这变化过程始终，其肥皂膜构型的皂液边缘形状如上图所示；由此我们看到了等周性问题与斯坦纳问题的联系. 请注意，在每一构型中，液体边缘或者是直线、或者是圆弧线，因为这里唯有平面皂膜和柱面皂膜才会出现.

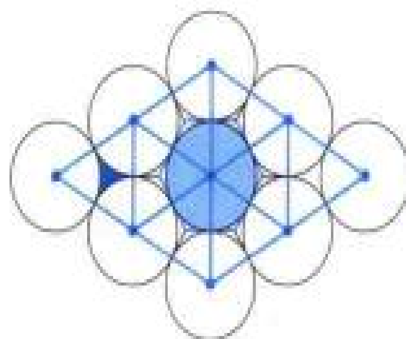
一个准十二面体形皱泡，外围气泡簇；由汤姆·诺迪（Tom Noddy）制作.



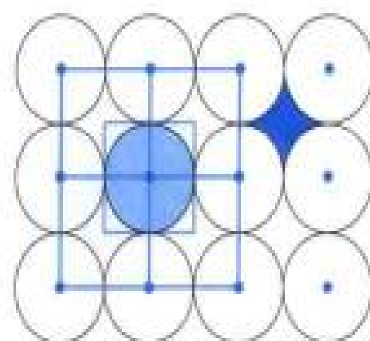
一个准立方体形皱泡，外围气泡簇；由汤姆·诺迪制作.



且把一些同样尺寸的圆柱体放在一块平板上，并试着将它们排列起来，使其并合得尽可能紧密．那么便会得到六边形图样，因为此图样保证平面上一些相同尺寸的圆形物体并合得最紧密（见右边上图，中心圆与邻近六个圆紧紧相接）．自然界经常出现六边形、120° 角、Y形，上述这种有趣的"紧密并合"性乃是其又一个缘故．

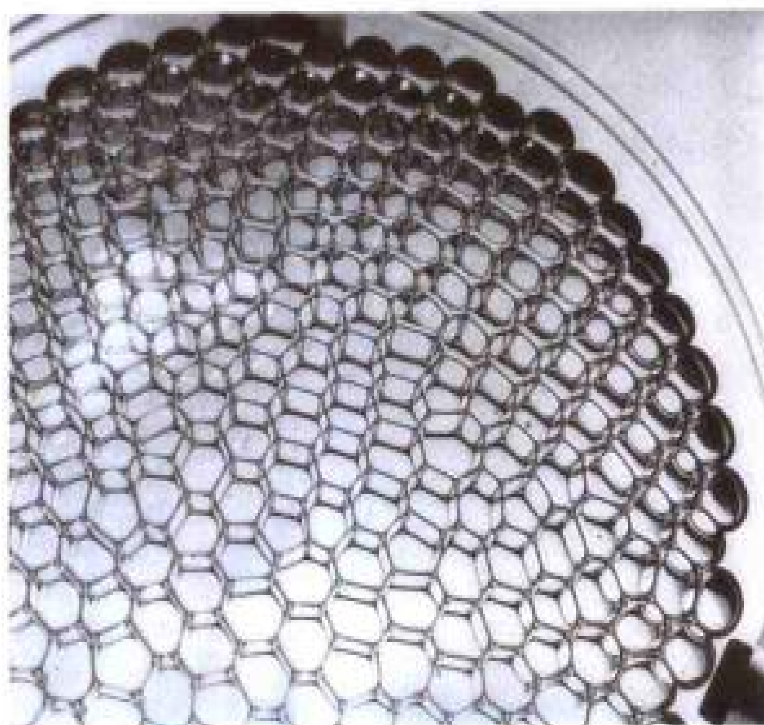


同样，在两块板之间，相同尺寸、紧靠在一起的物体亦排列成六边形阵列．把这些物体想像成活细胞，每个细胞都尽可能地膨胀，且膨胀的数量都相同，那么形成六边形（六角形）细胞的阵列形式则是十分显然的．其实，这在细胞生长过程中常常见到．外部压力倘若均匀地施加的话，也导致相同的结果．



圆的最紧密的并合形式．圆片（譬如说硬币）的六边形并合形式与其正方形列阵相比，前者的圆片之间留下的空隙为极小．

然而，六边形图样也可能以完全不同的方式得到．我们在两块平行板之间吹出一样大小的肥皂泡，肥皂泡立即并合．将肥皂膜系统的规则 1 和规则 2 同样用到这里，便得到一个其液体边缘满足 90° 角定律和 120° 角定律的肥皂膜系统（参见第5章第183页和第192页）．再则，如果肥皂泡的大小都相同，则相邻的两个元胞之间的压力不会不同；故而所有在内部的肥皂膜，其平均曲率均为零——事实上都是平面膜．因此就得到了六边形元胞列阵；唯有最外层的泡膜是圆柱形的，此乃最外面的元胞内、外侧上压力不同之故（见右边的照片）．



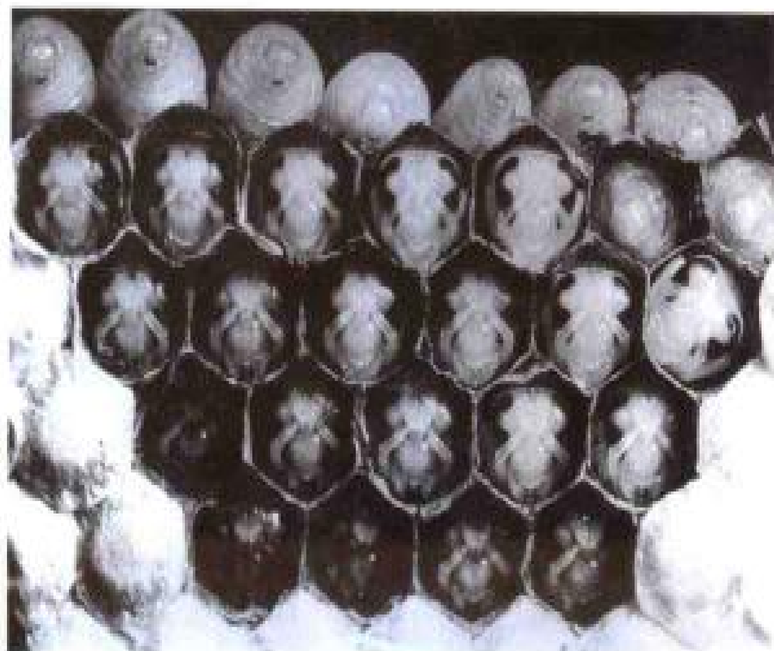
两块平行板之间肥皂泡的并合形式．



土耳其羊毛地毯（19世纪，安那托利亚西北部）.

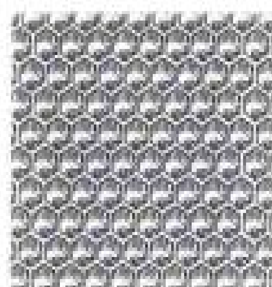
我们看到，六边形图案可因不同缘故而形成；就是说，极小面积构型可由不同的力（例如均匀压力或表面张力）产生，所以不可能仅仅根据图案去推断是受什么力作用.

尽管如此，正如博物学家达西·汤普森（D' Arcy Thompson）在其著作《论生长和形态》中所指出的，科学家们为试着解释蜂窝的几何结构而已确实作出了如此轻率的推断. 人所共知，蜜蜂建造的蜂窝是一种最美妙的六边形结构. 帕普斯记载道：古希腊人已试图用最优性原理解释蜂窝元胞的结构规则. 法国物理学家德雷默（R. A. F. de Réaumur,1683—1757年）也认为蜂窝结构必源出于极小原理：蜜蜂建造其蜂窝元胞或许以最经济的方式，为使所花费的蜂蜡尽可能的少. 德雷默以他的猜测诘问萨缪埃尔·柯尼希——莫佩蒂的对手. 柯尼希得知：夹角120° 和109° 乃出自于德雷默提及的极小原理；并且，这两个角度与对蜂窝元胞的测量结果相符合. 于是，法国科学院秘书丰特内勒（T.Fontenelle）申述：蜜蜂并不聪明，但它们却“凭藉



蜂窝.

其神秘的导引和指令而盲目地运用着最高深的数学”. 对此达西·汤普森解释如下：认定“蜂窝建筑之漂亮的规则性乃起因于一些物理力的某种不经意作用”，比认定“蜜蜂聪明地找到节约蜂蜡的方法”更有意义.



蜂窝的横截面.

然而，都认为蜜蜂是莫明其妙地偶然碰上了那最优化的蜂窝结构. 何以会如此？匈牙利数学家菲耶什·托特(Fejes Toth)于1964年研究了这个问题. 在其论文“何为蜜蜂所知者和不知者”里，他考察了蜂窝结构. 他把蜂窝确定为全同的凸多面体——称作元胞——的集合，元胞乃两个平行平面之间的空格，各元胞彼此无交叠、无间隙；并以如下方式组合：(1)每个元胞有一个侧面(称作基面或窗口)位于两个平行平面中的一个平面上且只在一个平面上；(2)每对元胞是等同的，因其基面相互对应.



蜂窝的纵截面.

蜜蜂建造的元胞是棱柱形容器，其窗口(及横截面)呈正六边形，而底面由三个全等的斜方形组成(见右图所示). 蜜蜂以这样的方式建造其蜂窝：元胞的六边形窗口附着于两个平面中的一个. 蜜蜂建造的Z形底面是最经济的吗？(Z形面当然比平面优越.)



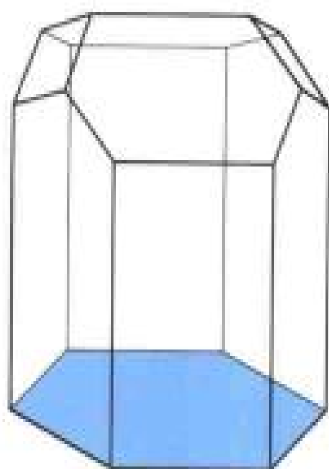
蜂窝的单个元胞.

为了把这个问题准确地陈述，我们且(按照菲耶什·托特的说法)把蜂窝的等周性问题表达为：

设有两个任意数 V 和 W，试求一个宽度为 W 的蜂窝，使其元胞的表面积为最小、但却围成体积 V.

(宽度 W 是作为蜂窝边界的两平面之间的距离.)

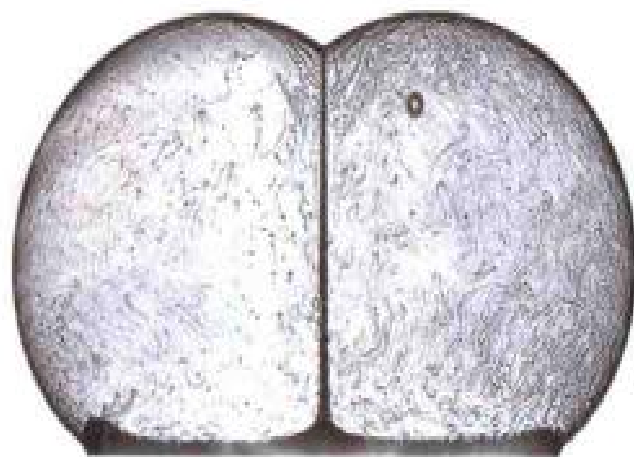
我们并不知道解答如何，但蜂窝元胞肯定不可能是该问题



托特元胞.

的解. 托特发现另一种元胞，其状况更好一点. 此元胞的底面由两个六边形和两个斜方形组成（见左图所示）. 托特元胞的窗口面积减少0.35%（而元胞表面积减小的百分比更多）. 因此我们说，蜜蜂做的工作相当好，但还不圆满，虽然实际结果尚在误差范围之内，故此结果仍然是最佳的.

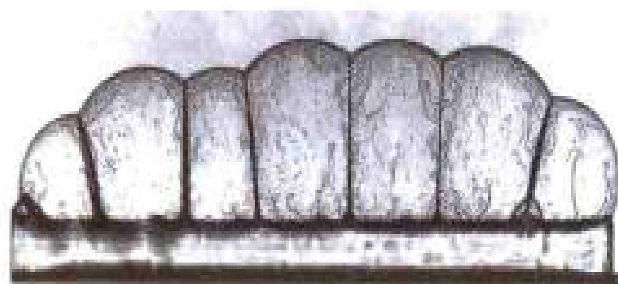
再回过来考察肥皂泡或肥皂泡之组合的许多构型，它们张成各种各样的框形. 可采用金属丝、玻璃板或液体表面，其上有



一块板上的双泡.



四泡.

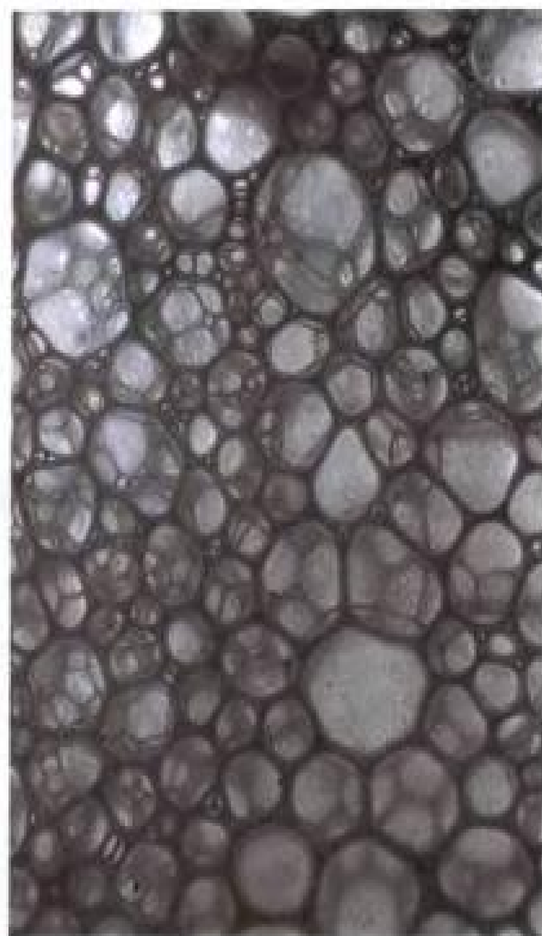


七泡"蠕虫".

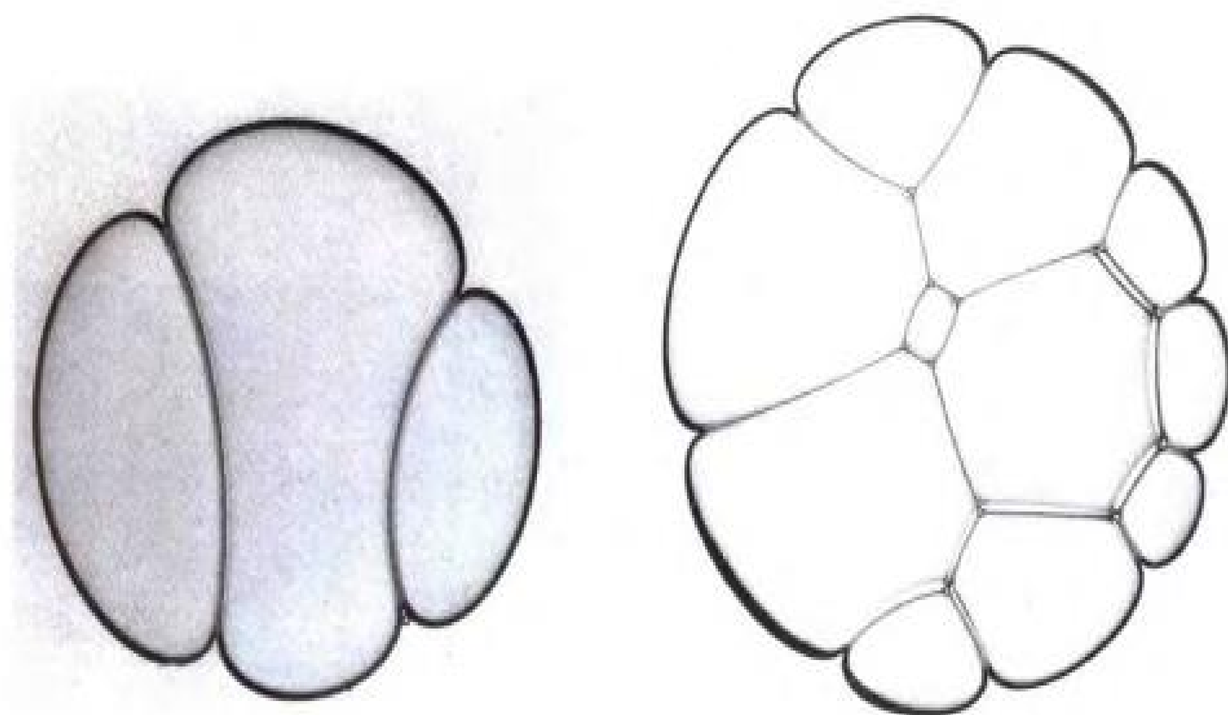
气泡构型静止着或漂浮着. 也可把支持曲面、曲线（金属丝）和活动线（细丝）结合起来. 一些可能形成的构型见第228—231页各图.



17泡"蠕虫"，由汤姆·诺迪制作，据记载为18泡.



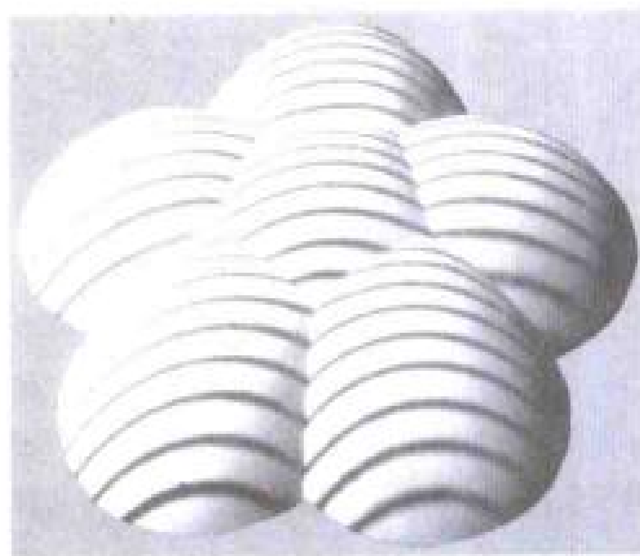
气泡的集聚，即泡沫.



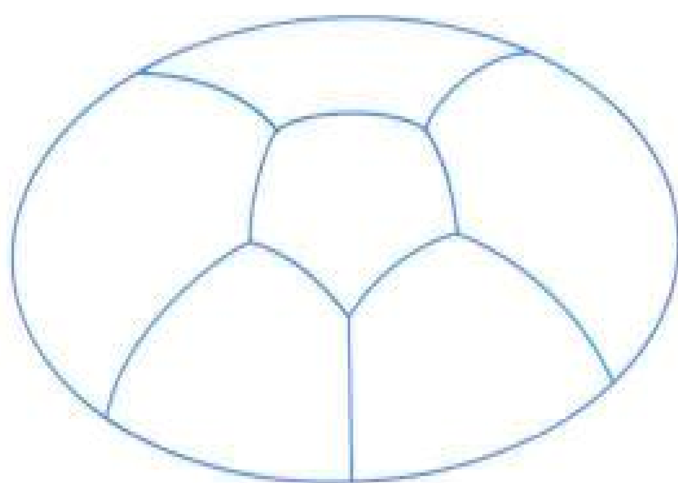
两块平行板之间的一些聚合的肥皂泡的横截面，以及其侧壁的横截线（粗线所示）



肥皂泡簇。



细丝上的气泡，此乃石膏模型.



支持气泡的细丝图.

且考虑描述肥皂泡、或肥皂膜和肥皂泡之构型的数学问题. 如我们所已知，此问题就是在张成给定框架（固定的或可动的）、并围成某指定体积的所有曲面组合构型中使曲面面积为极小. 对这样一个数学问题的解涉及一个或多个具有恒定的平均曲率的曲面. 极小曲面的平均曲率为零，而球面和柱面的平均曲率恒定，但不为零. 所以，这个数学模型问题的解是具有不同的平均曲率的曲面的集聚. 此乃由实验观察到的肥皂膜－肥皂泡列阵模型. 极小曲面对应于其两侧承受相同压力的肥皂膜；而平均曲率非零的曲面对应于其一侧承受的压力大于另一

侧的肥皂膜.

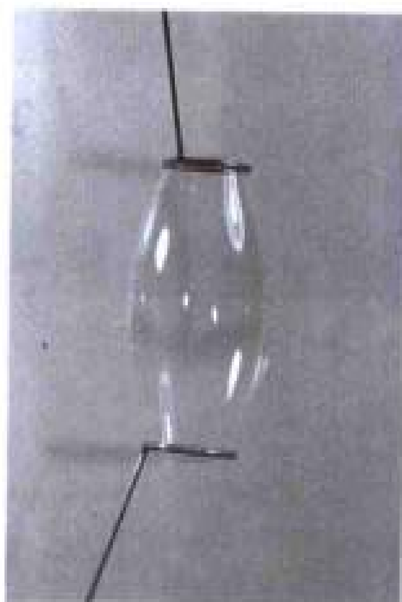
尽管这样的数学曲面是物理实体的良好近似，但二者毕竟并不一致. 我们必须区别物理现象及其数学模型，这尤其是因为数学概念涉及的课题范围比可由实验上所能实现的大得多. 举例说，倘若一个其平均曲率恒定的曲面缺乏稳定性，它就不可能在物理上由一肥皂膜具体地显示出来. 我们已经了解，存在一些非稳极小曲面（例如某些悬链曲面），在物理上并不能由肥皂膜具体地显示. 同样，圆柱面在其长度等于或大于其圆周，即其直径的 π 倍时就变成不稳定的. 这一点易于由实验验证，但须相当谨慎地进行（参见下一页的图示说明）. 设在两个其中心同轴的圆环之间有一圆柱形肥皂泡，一旦这圆柱形膜变成非稳态时，它就分解成两个大小不同的、独立的球形肥皂泡. 长圆柱面的不稳定性非但可由实验显示，而且可用数学模型予以严格的证明.

由普拉蒂奥斯发现的圆柱形肥皂泡的不稳定性，与一种人们熟悉的类似的物理现象——每个水注断裂成一系列水滴——密切相关. 此现象可在喷水泡里或花园里用喷壶洒水时观察到. 水注分散成雾状水珠，这对于由诸如电场或声振动引起的微小扰动甚为敏感. 英国物理学家博伊斯（C.V.Boys）在其经典著作《肥皂泡及其颜色和对其产生影响的作用力》里描述了许多简单实验，可用水注或肥皂泡做这些实验. 此书本由这位出色的实验物理学家于1889—1890年间所作的三次演讲稿组成. 他偶然看到从实验室里涌出的巨大烟圈，把行人围绕起来，使他们大吃一惊.

且考察一个看似简单的实例——球形肥皂膜，再来表示真实事物与数学模型的差别. 自然界不难表示，光滑的肥皂泡（没有人为的边界，你可向里面吹气）才正是球面. 然而

在1984年以前，人们并不知道球面是否是唯一的、其平均曲率恒定的有限完全曲面.（两头无界的圆柱面也是其平均曲率恒定的完全曲面，但并非有限，可沿着两个方向伸展到无限远.）大部分数学家都猜测，其答案为："是的，球面是唯一的有限完全曲面"；各种不全面的结论都被证明了. 我们知道，例如，在有限完全曲面中，球面是唯一的、其平均曲率恒定的凸曲面. 亚历山德罗夫（A.D.Alexandrov）甚至证明：


(A)

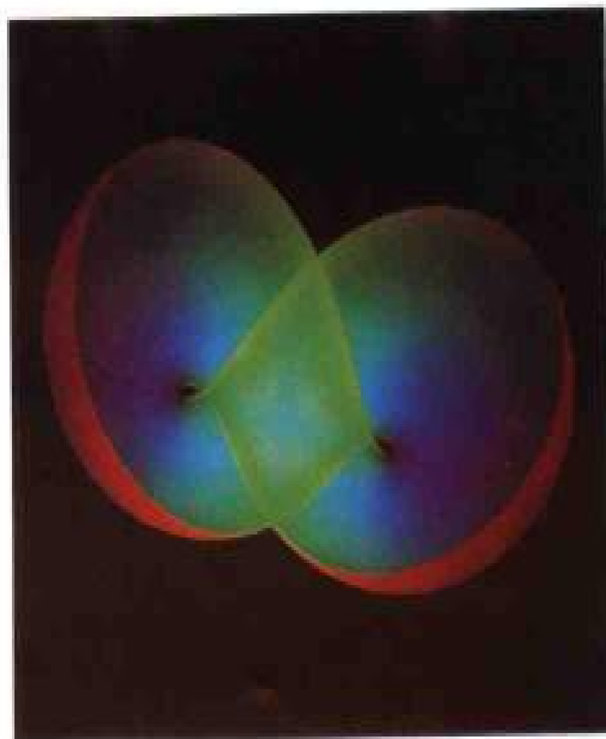

(B)

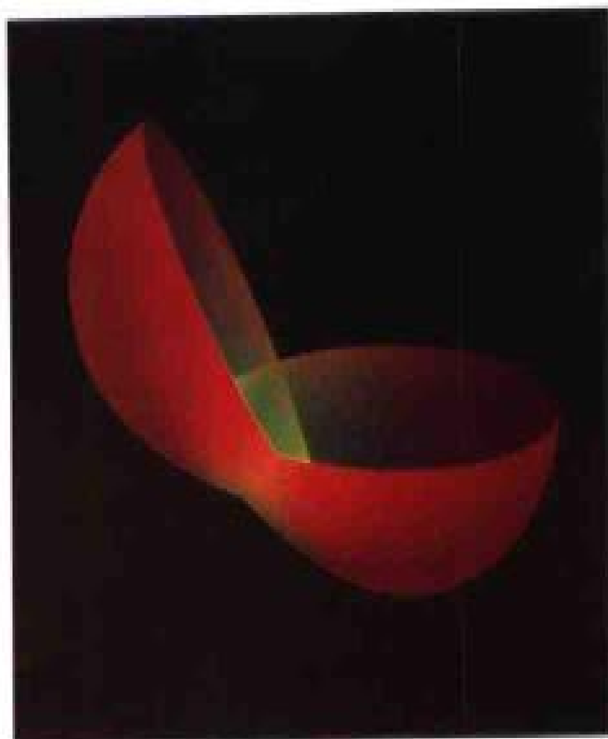

(C)


(D)


(E)

（A）两个其中心同轴的圆环之间的肥皂泡. 此肥皂泡通常并非圆柱面，而是鼓起一个腰，或有一个隆起部分.（此现象的解释可在第231—233页找到.）为将带有腰或隆起部分的肥皂泡变成圆柱面，必须或者向泡内添加空气、或者从泡内抽出空气.（D）连接置于同一平面上的两个圆环的肥皂泡（这两个环也可用圆盖罩上）.

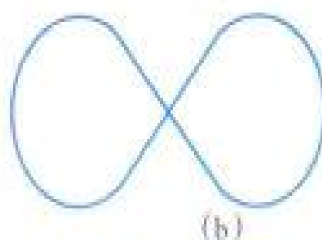




温特（H.C.Wente）于1984年发现一种其平均曲率恒定、亏格为1的有限闭合曲面，这里是由计算机生成的图画；其中，温特曲面是从三个构成部件出发、一步一步组合成的．这温特有限闭合曲面（无边界）未展现怎样得以自相交．为理解这种结构，须细看从左至右这四幅图．本页的这两幅表示同一个构成部件在两个不同的位置上．



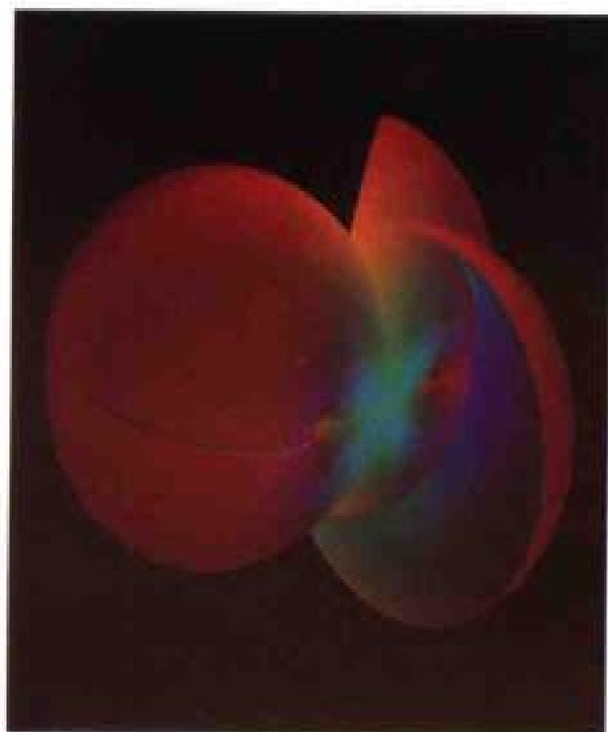
（a）



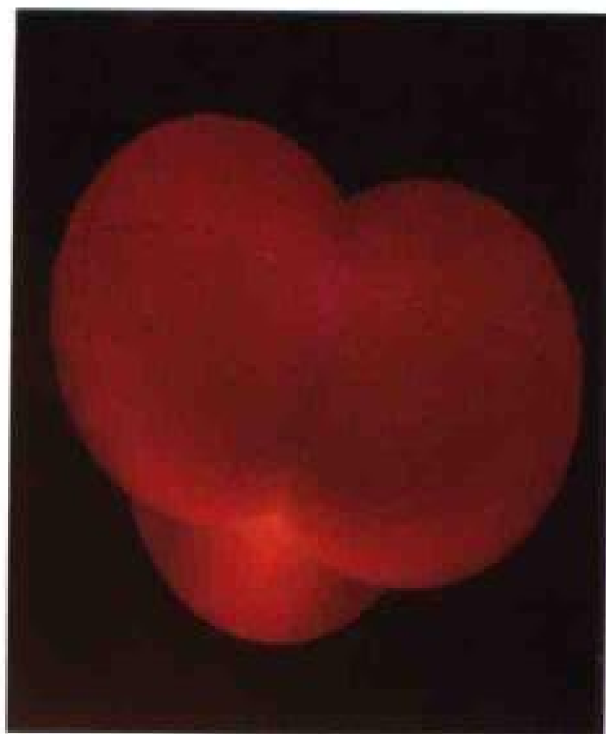
（b）

（a）非自相交闭合曲线；
（b）自相交闭合曲线．

亏格有限（亏格大于零）的非自相交柄－体曲面不可能有恒定的平均曲率．但数学家们想得出完全一般的结论．为此就必须再考察自相交曲面．接纳了这样的曲面，海因茨·霍普夫（Heinz Hopf）便能表明，零亏格和没有边界的有限曲面必是球面，即使这曲面自相交也如此．但到目前，上述猜测——例如，存在亏格为1、平均曲率恒定的有限完全曲面，然而它却是自相交的——被证明并不成立．



使两个构成部件合拢.



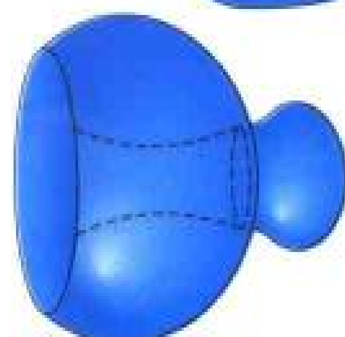
由三个构成部件组成的有限温特环面.

具有恒定平均曲率的旋转对称曲面

（H－回转曲面）

其平均曲率恒定的曲面是肥皂膜、肥皂泡以及自然界可能出现的别样形态的模型．为了确定由H－曲面所描绘的自然形态、特别是找到H－曲面中的哪些曲面也具有旋转对称性（诸如圆盘面、悬链曲面和圆柱面），乃是十分有用的．人们称这样的曲面为H－回转曲面．普拉蒂奥从实验上发现，确实存在六种不同的H－回转曲面：平面、悬链曲面（其平均曲率不为零）、球面、圆柱面、波纹面、波节面（其平均曲率为零）．





（a）非自相交闭合曲面；
（b）自相交闭合曲面.



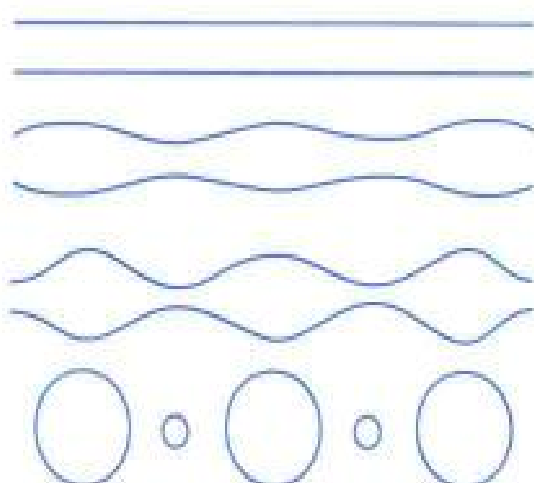
H－回转曲面的生成曲线.圆的旋转线生成圆柱面;椭圆的旋转线生成波纹面;如此等等.

早在1841年,法国数学家德洛奈(Delaunay)已经证明:上面列出的H－回转曲面都确为完全曲面;并且,所有这些曲面都能按照一条简单规则生成.此规则如下所述.且固定一条直线,将其用作旋转轴线.然后,再选一条圆锥曲线——即椭圆、圆、抛物线或双曲线——并想像圆锥曲线在轴线上滚动.那么,圆锥曲线的每个焦点均画出一条曲线,该曲线称作焦点的*旋转线*.当此曲线绕着轴线旋转时,就生成六种H－回转曲面(五种曲面的生成曲线如左图所示).例如,圆的焦点画出一条平行于轴线的直线,其相应的回转曲面为圆柱面.

如果椭圆在轴线上滚动,其任何哪个焦点都生成波纹曲线(波线).该曲线与轴线始终不接触;当它旋转时,就生成波纹面.倘若椭圆的两个焦点离得不怎么远,两条波纹曲线则起伏不大;两焦点移向一处,波纹面愈益近乎为圆柱面了.

椭圆的相反极端图形就是直线段,这可看作为退化了的椭圆;它的两个焦点离得尽可能的远:直线段的两个端点即其焦点.此直线段的旋转线是一个个半圆的连续(一端向下接触轴线,另一端绕其摆动,便画出一个半圆;依此等等);一旦绕轴旋转则生成一连串全同的球面.

几个H－回转曲面(圆柱面、波纹面、球面).



倘若椭圆的一个焦点仍在近处,而另一个焦点移至无限远,那么该椭圆就变成抛物线.其焦点的旋转线,乃是前文已提到过的悬链曲面的子午线.

最后,我们来描绘一下双曲线的一个焦点之旋转线是如何生成的.设想双曲线的两个分枝是密切

关联的，二者就可作为一个统一体而移动，使一个分枝在轴的上侧行进，譬如说向右滚动，从一条渐近线移向另一条渐近线[2]；于是，就使另一个分枝在轴的下侧向右滚动，从一条渐近线移向另一条渐近线．分枝曲线一而再地滚动，总是向右行进，随之焦点的轨迹形成，便得到一条向右伸展至无限远的曲线．采用同样的方式，此曲线向左亦伸展至无限远．这样，我们得到了一条带有无限多个圈环的光滑曲线．由它生成波节面，也是回转曲面．

一条直线绕着与其交成直角的轴线旋转即得一平面．但这样一条垂线被看作其半径递增至无限大的半圆序列之"极限"．所以，此垂线可被解释成无限长、无限扁的椭圆的旋转线．

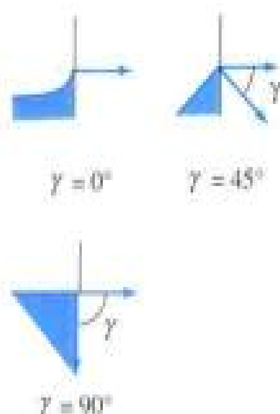
这里只要记住古希腊人将熟知的曲线置于别的曲线上滚动以构成新曲线（见第2章中所讨论的）的方式就行了．

在宇宙飞船里怎样沐浴

前文已述，虚功原理暗示：肥皂膜构型乃由其平均曲率恒定的曲面组成．并且，由此原理得出：液体的不受重力作用的自由表面就是这样的曲面．

人们如何能摆脱重力作用？或可选用一个盛有液体的容器，将其放到外层空间；或可将其放到升降机里，然后使升降机自由下落．后者的实验已经做过，并对种种数学预言给出令人难忘的验证．你或许已认识到，外层空间里的宇航员会经受由失重而造成的不可思议的困难．譬如说，当宇航员在失重状态下想沐浴，你会建议以怎样的容器作为浴缸？

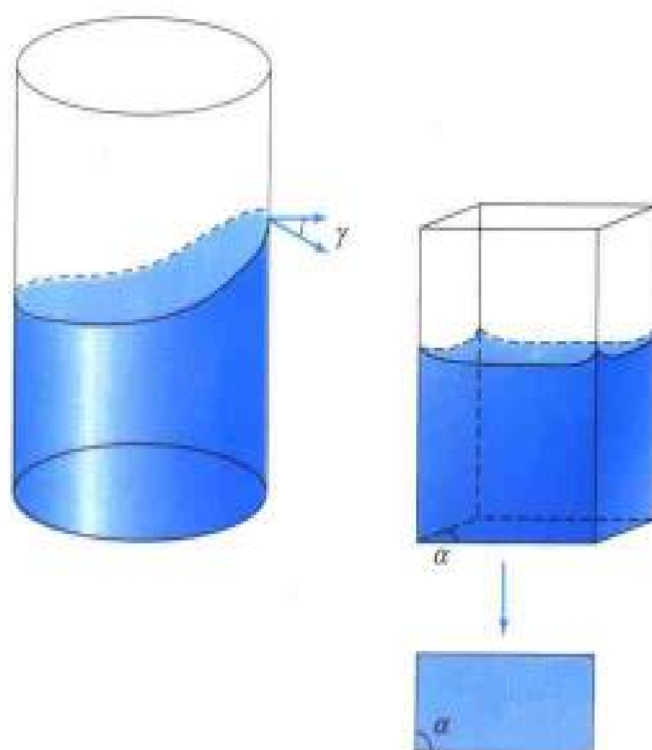
[2] 渐近线即为极限直线，双曲线的两个分枝向其趋近，终不能触及．



交会角γ的三种特殊情况.

很清楚，宇宙员不可能使水坠落，他们难于把流动的水滴集聚，再将其回到容器内. 而更严重的困难是，浴缸或许不能使浸润液体保持平衡（“浸润”意指容器以曳引力作用于液体）. 情况是：浸润液体的自由表面与容器壁交成γ角（交会角γ在0°和90°之间）. 假如容器的底面水平、侧壁竖直，则其所有的水平截面都是一样的. 假定侧壁有几条棱边，且将其中一条棱边处之内角记以α. 若$\alpha/2+\gamma<90°$，容器内的浸润液体不可能处于平衡状态. 换言之，宇航员的浴缸内的水很可能上升而越过缸的上缘；倘若浸润角γ小于45°，而浴缸有矩形横截面，这种情况必然发生.

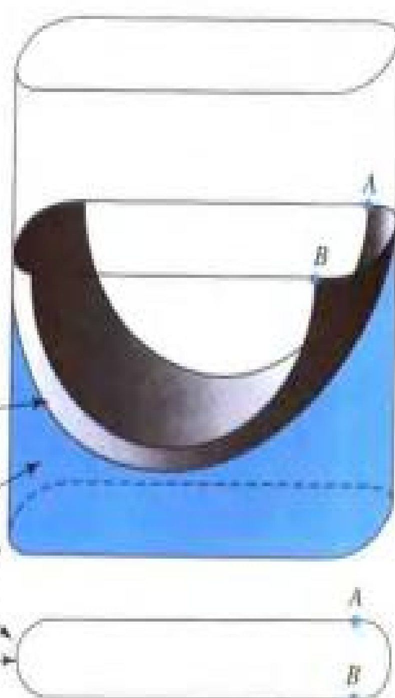
在许多场合都可假定，浸润角γ接近0°；姑且说，是在以玻璃器皿盛水份多的溶液的场合. 于是在飞往月球的途中，如果你试着从具有方形横截面的玻璃杯中饮酒，就会弄脏了你的



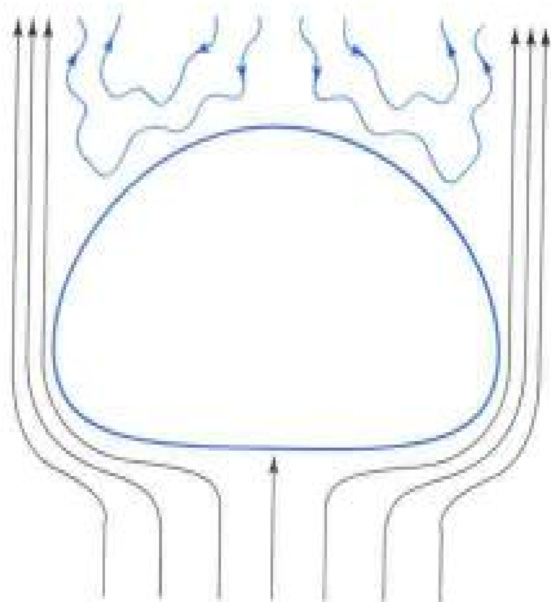


液体已爬上器壁(此实验由康卡斯和芬恩设计，而由马西卡(Massica)在美国国家航空、航天管理局的降落塔(俄亥俄，克利夫兰)上进行；$\alpha = 60°$，$\gamma = 25°$。





宇航员的浴缸：双曲线的旋转线(左)，水粘贴于此曲线.



降落的雨滴和蒸汽线.

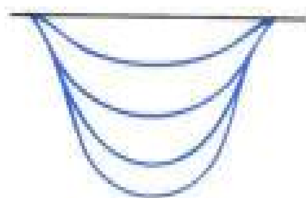
衣服. 诚然，这不是一个虚构的数学故事；因为公式 $\alpha/2+\gamma<90°$ 乃由数学论证导出，并在美国国家航空、航天管理局（NASA）的降落塔上做过实验得以确定的验证.

上一页的下图表示由保罗·康卡斯（Paul Concus）和罗伯特·芬恩（Robert Finn）于1974年提议的"宇航员的浴缸"的纵截面. 此截面之边界的弯曲部分由两段由双曲线的焦点所生成的旋转线组成. 假定浴缸内的水与浴缸壁交成0°，水所形成的自由表面也呈现清晰；这水表面就是波节面的一部分.

然而，还有第三种摆脱重力的方法：取一种待研究的流体(例如油)放入另一种流体(酒精与水以适当比例混合)内，后者与前者并不搅和，但有相同的密度. 举例说，我们用导管或滴管将少量油注入酒精－水混合液. 油便立即形成完整的小球.

雨滴若在真空中降落，当然必呈球形. 但空气的阻力使雨滴成为非球形. 而且，每一降落的雨滴都有内部运动.

重力对液滴影响颇大. 例如，在玻璃板上有非浸润液体(诸如水银)，若液滴甚小，则近乎球形；而大滴因本身有重量而相当平坦，大量的水银流开来，形成很平的一滩.（无重量液体被支持玻璃板所排斥.）



悬挂的水滴.

悬挂的浸润液滴(见左图)，与其搁置着时的情况完全不同. 我们都知道，悬挂着的液滴不能"太大". 也就是说，弹性表皮能支持少量液体的重量，而重量大些便使表

皮层裂开．事实上，可恰当地定义一个得以生成为悬挂液滴的尺寸；一旦达到此尺寸，稍有微小扰动就会使液滴下落．我们亦可如此解释这个现象：液滴达到稳定极限，则便从稳定平衡转变成非稳平衡．故而从药剂滴管里滴出的一切液滴都是同样大小．值得注意一下大约一百年前对于悬挂液滴的数值研究，这导致颇为有效的数值研究技巧的发展，且今在应用科学的许多领域里，其数值分析均用到这种技巧．

行星、转动液滴和原子核

另有三种现象可用基于伯努利虚功原理的简单变分原理作出解释．这些现象属于天文学、流体动力学和核物理学；通常，它们似乎并不一眼就看得到．我们将逐一讨论其密度均匀、在自引力作用下的转动液态物质，具有表面张力的转动液滴以及具有角动量或没有角动量的原子核．

所有这些讨论都可归纳为如下问题．设想有若干数量的均匀流体，聚合成一滴或数滴（抑或如数学家所言，散布于连通域或非连通域）．流体的每一部分或者简单连接（如同球体），或者多重连接（如同圆环或双圈饼）．

我们且假定没有外力（诸如重力，亦即地球之引力）作用于液体，所有作用力都由液体自身产生，但并不包括自引力现象．仅对极大质量流体，其自引力才产生作用．按照牛顿的万有引力定律，流体的自引力起因于其每一部分受其他部分的吸引作用，这种力促使液体聚合在一起．我们再假定表面张力亦会产生作用．换一种说法，设液体的表面被一弹性表皮所覆盖，表皮施收缩作用于液体．此外，还假定有两种扩散力——静电力和离心力，与那些收缩力相抗衡．如果液

月球，此照片由利克（Lick）天文台（在加利福尼亚）所摄（用36英寸折射望远镜）



体均匀荷电，则由库仑定律得知：每一部分都排斥其他任何部分；如果此液体流动，甚至必须计及电磁效应；最后，如果液体像陀螺那样以均匀角速度旋转[3]（试想像木星，是一个由汽化液态物质组成的巨大的旋转陀螺），它的每一部分都经受离心力作用，离心力促使液体弥散.

一般认为，倘若液体像陀螺那样旋转，即其中没有“内部的移动”，它就是处于回转（或相对）平衡状态. 凡身处液体内部某处的观察者，与外界又没有联系，他就不会注意到液体的转动，或许以为是静止着的. 所以，在此回转平衡态，有四种力

[3] 这是否是合理的假设为另一个问题；除非作为一级近似，在某些场合可予接受.

相互平衡：表面张力和自引力这两种收缩力以及静电力和离心力这两种扩散力.

要问的问题显然为：处于回转平衡态的液体可能呈何形状；怎样的物体处于稳定的回转平衡态？

按照伯努利虚功原理，平衡态是势能的稳定状态；稳定平衡态相应于势能为极小. 液体的总势能乃四项之和：

总势能＝表面能＋引力能＋电磁能＋转动能.

其中，表面张力的势能正比于液体的表面积；"转动能"标示离心力的势能.



日全食时摄下的太阳之光环（日冕），摄于怀俄明格林河，1918年6月8日，由加利福尼亚的海耳（Hale）天文台所摄.

历史上，最早考察的实例是转动液体，它被当作行星，后来被当作恒星、星云的模型．对于这些物体，由引力产生的自吸引作用是如此巨大，以致其表面张力的影响可予忽略．最初只考虑不带电的天体，故而势能减少为引力能和转动能之和．

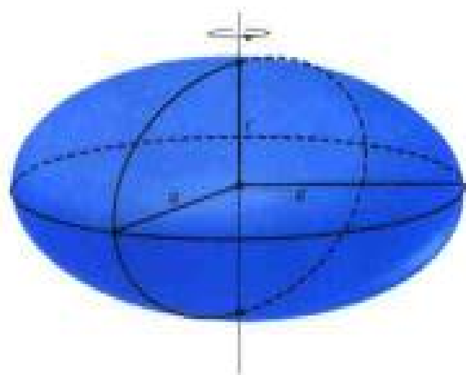
转动天体理论起始于伊萨克·牛顿、科林·马克劳林（Colin MacLaurin）和亚历克西斯－克劳德·克莱洛（Alexis－Claude Clairaut）的工作．然而事实上，对天体转动的实验观察早就进行了．太阳的黑子已观察到多时，并得知其实际位置有变．在欧洲范围里观察，黑子从太阳的左侧移向右侧．当天文学家能以折射望远镜观看太阳后，观察工作变得精确得多．1611年，德国天文学家法布里丘斯（Fabricius）由其观察得出结论：黑子是太阳的整体要素，黑子的移动乃由太阳的转动引起——多么惊人的发现！1612年，意大利的伽利略、英国的托马斯·哈里奥特（Thomas Harriot）和德国的杰塞特·克里斯托夫·沙伊纳（Jesuit Christoph Scheiner）发表了各自的观察结果．伽利略对黑子移动作出与法布里丘斯相同的解释，而沙伊纳把这说成小行星绕着太阳旋转．伽利略在1613年发表的《关于太阳黑子及其偶然事件的历史和论证》一稿中首次证明沙伊纳的论点是错的，公开支持哥白尼的日心说．沙伊纳最终承认伽利略是对的，继而作出比伽利略精确得多的观察，并发现太阳在27天内完成一次全转动．

转动星的数学理论起始于牛顿的《原理》，由此论证，转动缓慢的液体必然在两极（确定转动轴的两端点）处被压扁．前文早就提及，为验证莫佩蒂的那个预言，如何促使人们终于接受牛顿物理学．伏尔泰，起先热情地祝贺莫佩蒂，后来却写下怀有

恶意的诗句：

> 您已经证明了牛顿所知，
> 　　却并未改动些微；
> 况且是混乱不堪、令人生厌．

给定体积的均匀转动液体的平衡(态)构型是怎样的？除球以外的最简单构型为*扁球*．此乃椭圆绕其短轴旋转而生成．球体是*椭球体*的特例，椭球体的平面截面均以椭圆为边界(圆是椭圆的特例)．每个椭球体都有三根主轴，两两正交，皆通过椭球体的中心．主半径a，b和c为从中心到主轴在椭球表面上的端点之间的距离．三者中a乃最大，c乃最小，即$a \geqslant b \geqslant c$．那么$a$是从中心到表面的最大距离，$c$是其最小距离．扁球以关系式$a = b > c$为特征，而长球满足关系式$a > b = c$．



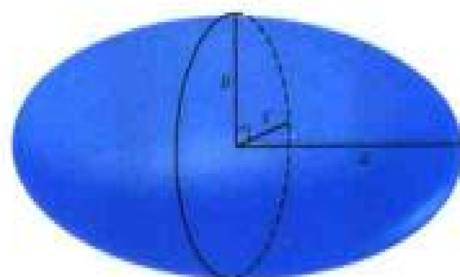
扁球，其转动轴是椭圆的短轴，故而椭圆的长轴就是此球之圆形横截面的半径．

1742年，关于液体平衡态的普遍理论基本上尚未形成，科林·马克劳林表明如下漂亮的结论：

> 总存在两个处于回转平衡(状态)的不同的转动扁球，此乃就转动扁球的每一体积V以及不太大的每一角速度ω的数值而言．

这里的“不太大”意指角速度必须不超过

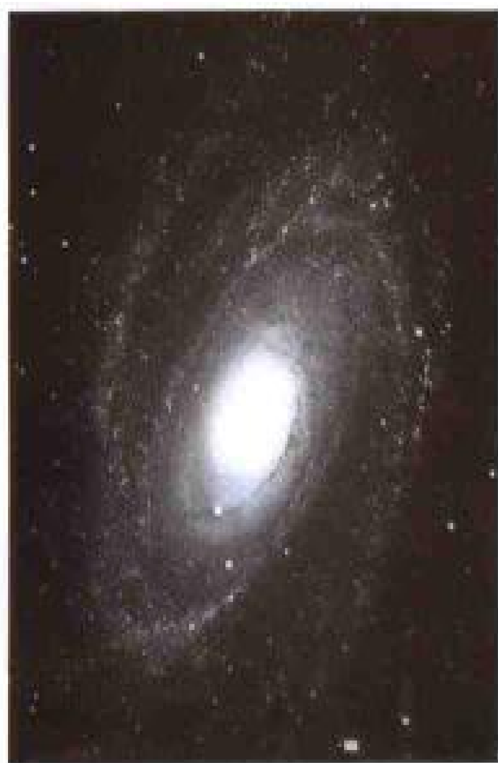
$$\omega_L = 1.188\sqrt{GD},$$



带有三根主轴、主半径为a，b，c的一般椭球．

其中，D记作液体的密度，G为牛顿引力常量．倘若ω趋近于极限值ω_L，两个马克劳林球的形状就接近于以角速度ω_L转动的同样的转动球的形状．





上：一个边在前面的旋涡星系（侧视），在后发星座，由海耳天文台所摄（200英寸）.

当ω趋近于零值（亦即，转动慢下来，接近于不转）时，马克劳林球中的一个越来越像体积为V的球——所谓绝对静止（$\omega = 0$）的平衡构型，而另一个逐渐变成其直径为无限大的圆盘.

近乎有一百年，人们相信，马克劳林球是处于回转平衡状态的匀速转动着的均匀流体之唯一可能的形状. 拉格朗日甚至认为不可能有任何其他平衡构型；但这是不正确的. 1834年，约可比发现：

> 对于每一体积V和每一角速度ω（既不为零、又不太大）的数值而言，总存在一个平衡构型，呈非对称性椭球形状（$a>b>c$），绕着其最小的主半径c的轴转动.

精确地说，ω必须低于

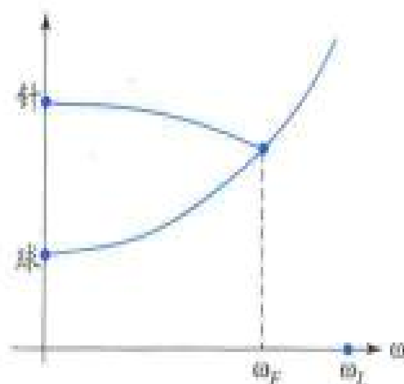
$$\omega_J = 1.084\sqrt{GD}.$$

倘若液体确实具有三维椭球（$a>b>c$）形状的话，椭球则以角速度ω像陀螺那样地转动. 注意：ω_J小于ω_l.

如果ω趋近于ω_J的数值，约可比椭球最终类似于一个马克劳林球（它以角速度ω_J转动）；如果ω趋近于零值，约可比椭球渐渐类似于无限长的细针. 又细又长且转动得很慢很慢的行星上的生命体会像何模样？

亨利·庞加莱（Henri Poincaré，1854—1912年）

于1885年所作出的发现是另一个激动人心的事件. 他发现：从约可比椭球族分叉出一个梨状平衡构型的新分枝，这类似于从约可比椭球中分叉出一类马克劳林球. 庞加莱猜测："梨状物体的分叉稳定而持续地导向伴有卫星的行星产生."他还进一步声称：循着约可比椭球族系必有另一些分叉点，它们产生另外一些稳定分枝，这些分枝最终会发展成带有两个、三个或更多个卫星的行星. 这样，庞加莱设想了一个极好方案，藉此能说明我们的太阳系起源于一个演化过程，而非从突然的崩裂中产生.

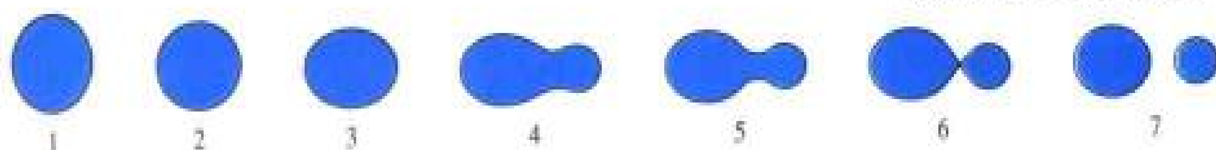


约可比分叉图.

按照康德（Kant）和拉普拉斯的宇宙起源假说，我们的太阳系起初是一个巨大的、转动很慢且密度很小的气球. 自引力导致气体之间相互吸引，其密度和角速度因此而逐渐增大，那么，物质就从气态转变为液态. 随着密度和角速度增大，初始时的球状物质便会变成越来越扁的马克劳林球，直至达到约可比椭球的分叉点为止. 在这一点，马克劳林椭球或许丧失其稳定性，而约可比椭球会保持为稳定构型. 为此，液体变作约可比椭球，由于吸引作用更强，则就变作梨状物体，它最终分裂成一个主体和一个附属物.

但庞加莱始终未作出对于证明上述这种情况所必需的详细计算. 而此计算乃由乔治·达尔文（George Darwin, 1845—1912年）完成；他申言：他已证明了梨状形态的稳定性. 遗憾的是，亚历山大·李雅普诺夫（Alexander Lyapunov）能驳倒达尔文的计算结果，其他科学家亦然. 于是，庞加莱的奇妙

庞加莱分叉及其梨状物体.





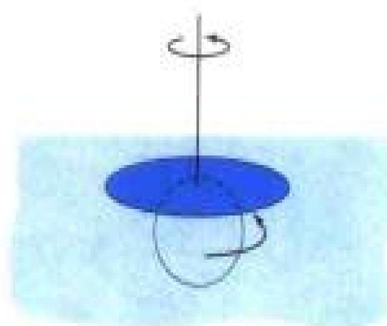
A·M·李雅普诺夫（1857—1918年）.

模型被毁. 尽管如此，由庞加莱、李雅普诺夫，以及后来的利希滕施泰因（Lichtenstein）发展起来的平衡构型理论毕竟是非线性分析中的分叉理论的开端. 这个重要理论乃是诸如流体力学、数学生物学和弹性学等那么不同领域的主要工具.

再回过头讨论旋转液体球，如果角速度ω太大，其形态就不可能是回转平衡态. 事实上，倘若ω^2大于$2\pi GD$，便不可能有回转平衡态. 唯有一个方法摆脱此困境：考察转动液体，其内液体有内部运动，但形状并不变更. 这是平衡态的颇为"微弱型式"，但很像是更现实的一种型；由狄里克雷和黎曼于1858—1860年间作了研究. 此项研究由钱德拉塞卡（Chandrasekhar）工作到20世纪60年代.

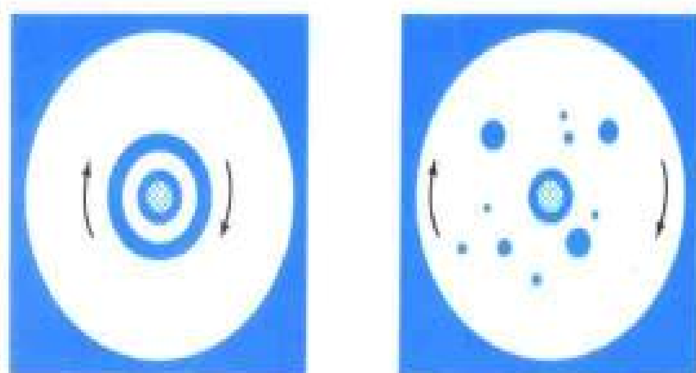
如普拉蒂奥所设想的那样，这里我们且考虑小的油滴，悬浮于另一种密度相同的液体. 那么，表面张力是占据优势的力，自吸引作用实际上并没有. 而且，我们又假定油滴不荷电. 故而其势能为表面能和转动能之和（忽略作为主体的液体之阻力的影响）.

按照普拉蒂奥的实验，设想悬浮油滴触及一小圆盘，如左下图所示. 这圆盘悬挂于一细金属丝，故而可以转动，因此使油滴凭藉阻力而转动. 随着角速度增大，离心力的影响会变得愈来愈强. 起先，油滴在两极处被压扁，在赤道线处膨胀. 待到转数更大时，便从液滴分出一圆环（见下一页的上图）；而转数降低，圆环重又并入中心液滴. 如果转数还要高，圆环裂成几个不同尺寸的小滴.



普拉蒂奥仪——液体内有转动液滴.

这种情况使我们想起太阳系，它有中心大天体及其包围着的较小卫星. 这里的圆环类似于木星或土星的环. 然而，上述实

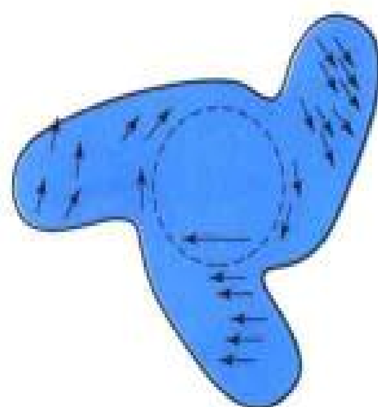


一转动液滴分解为滴和环；再分解成一滴，并附带一些小滴.

验并不能得出关于我们太阳系的任何结论，因为这两种场合下的作用力是相当不同的.

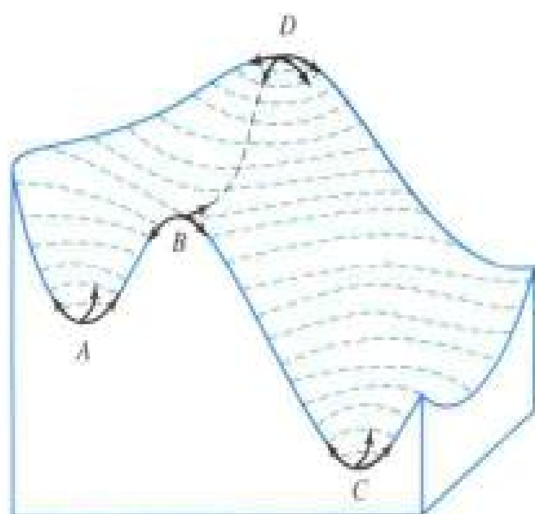
近来，（美国）帕沙第纳的喷气推进实验室的科学家重复、并改进了普拉蒂奥的实验. 他们除了看到普拉蒂奥所发现的轴对称性和环状图像外，还发现了二凸起（二瓣形）、三凸起（三瓣形）和四凸起（四瓣形）平衡形态. 转数增大，各形态都退化为单瓣形态. 目前还没有令人满意的方式，足以解释此现象. 因为作为主体的液体与油滴之间的摩擦力不能忽略；摩擦力导致内部流动，一旦瓣片形成，内部流动就十分显著.

最后，我们来考察一下原子核. 1929年，乔治·伽莫夫（George Gamow）提出第一个核模型——液滴模型. 可以把原子核设想成具有表面张力的均匀荷电液滴，或者是静止着的，或者在更精致的模型中乃是转动着的. 下一页的左上图绘出非转动核的势能之形貌. 其中，势能表示成超出相应之核态的"高度".



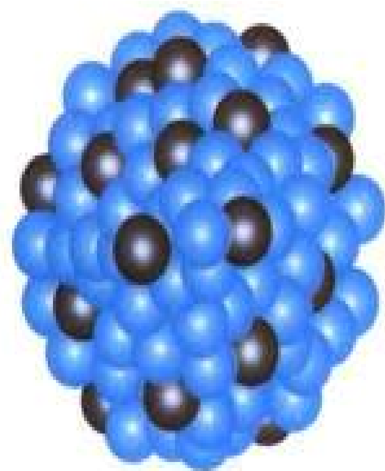
三瓣图像；箭头表示液滴内示踪物的角速度.

如果液滴呈球形，其势能为绝对的极小. 两个或任意个数的球若不荷电，亦保证其势能为局域极小. 然而，如果球荷电，就彼此相斥，会推向无限远. "无限远"的几个球（即彼此离得

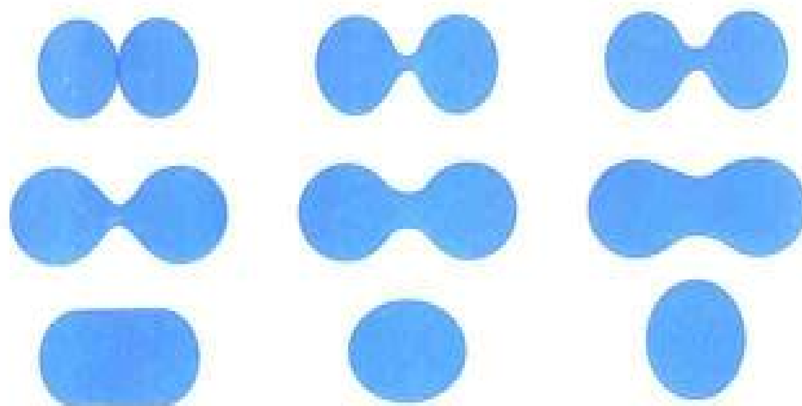


势能形貌.

足够远）亦为平衡构型．而“山间隘口引理”说明：在势能形貌图中，表示在无限远的一个或几个荷电球的“山谷”之间的某处，必有一鞍形（山间隘口）．这种山间隘口表示物理体系的非稳平衡态．倘若能貌图中有单独一个对应于球形构型的山谷，被一隘口与两个无限远的球所对应的双谷隔开，那么此隘口对应于带有两个全同的球形泡的对称性滴漏轮廓．滴漏轮廓的形状与物理参量的数值相关（见下图）．鞍点高出单一球形谷的高度对应于势垒的能量，势垒使单独的球形核不至于分裂．假如将能量引入核内——举例说，用一个中子轰击它——就能使其振动；如果振动使核超越势垒，它便分裂成两块．

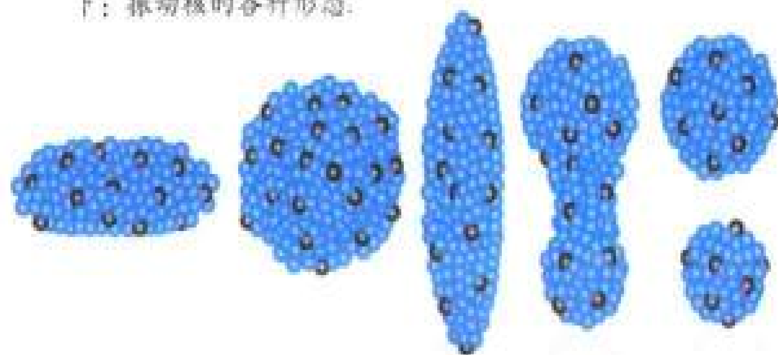


上：液滴模型中的静止核的形态．

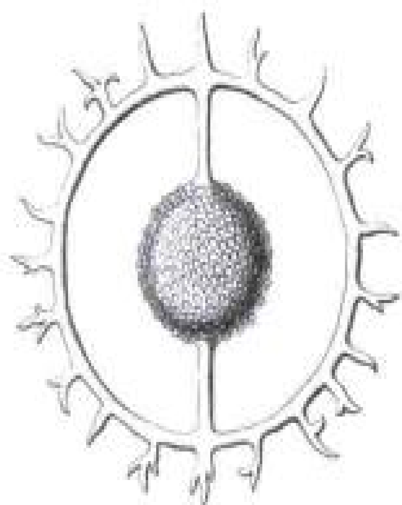


各种滴漏轮廓，对应于物理参量取不同数值．

下：振动核的各种形态．



生物细胞的形态



Saturnalis 属放射虫.

本节中，让我们考察物理力对于生物体的影响和造型功效. 这是一个内容十分丰富的话题，我们除了提及几个极为有趣的现有实例，把你的注意力引向达西·汤普森的《论生长和形态》[1]一书外，不可能说得很多. 虽然这部著作从未归入生物学研究的主流，而且未把遗传学和生物化学考虑在内，但它已成为自然哲学领域的经典. 生物学家已经承认：它已产生巨大影响，尽管"不可捉摸，又不直截了当". 再则，数学家们被汤普森的见解深深地吸引：

> 任何领域的物质，无论是有生命的还是无生命的，其形态及其在运动或生长的过程中所出现的变化，就一切情况而论，都可同样地描述成出于力作用之故. 简言之，一个客体的形态就是一幅"作用力图"；至少在此意义上，我



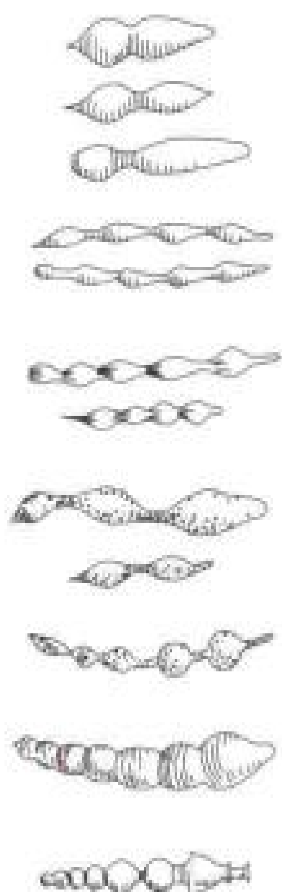
Xiphostylus 属放射虫.

---

[1]这本书于1917年初次出版. 它那经久不衰的感染力来源于诸多方面. 达西的一位同事哈钦森（G.E.Hutchinson）对于此书，试图表以言辞："《论生长和形态》是一部伟大的著作；因为它向我们显示，科学像是一股传统的活力；又告诉我们，传统是一种勇气、一种想像力. ……赋予文明人以价值，在于其多方面的才干；而其中少数人更拥有大部分价值. 达西·汤普森所拥有的价值比我们大多数人都大，他利用其价值竭尽解惑以能事. 他写的作品使人们领会科学思想，或许比任何其他作者的著作都更为上乘，其意味文明而开化. 他所描绘的壮美全景使我们尝试的所作所为具有价值，他经常受到给予少数人的奖励."

另一位同事梅达瓦尔（P.B. Medawar）认为达西的书无与伦比，此乃与用英国语言记载的所有科学年鉴中最好的文献著作相比而言.

达西的父亲是一位古典学者，他亲自教育儿子；因此，达西在以后的岁月中，除了自己的科学研究外，还翻译了亚里士多德关于动物的著作，编撰了《鸟类和鱼类的希腊语词汇》. 他搜集了古希腊文献所提及的所有鸟类和鱼类，并将其分类，从而写成此书；还藉此锻炼了他的动物学知识. 梅达瓦尔写道："他是一位富有优越个性的古典学者，足以担任英格兰、威尔士以及苏格兰的古典学会的主席；又是一位优秀的数学家，写就一篇完善的数学论文被皇家学会接受出版；还是一位博物学家，身居要职达64年之久. ……换而言之，达西是一位符合英国最佳传统的自然哲学家."



单细胞呈现为H－回转曲面（试与第236页边图作比较）



Tridiktyopus属放射虫.

们可藉以判断或推测由物体所施予或被施予的作用力：就此严格而特殊的意义而言，它是一幅图——对于固体，一旦有作用力施予，其构型即便形成，同时使其得以保持此构型不变；对于液体（或气体），在力对它发生作用的瞬间，便抑制或抵消了它固有的流动性．至于有机物，则不仅是生命物质的性质，按照动力学必须用力这个术语对其解释之；而且也是有机物本身的构型，其持久性和稳定性乃由力的相互作用或力的平衡予以说明，如同静力学中的描述一样．

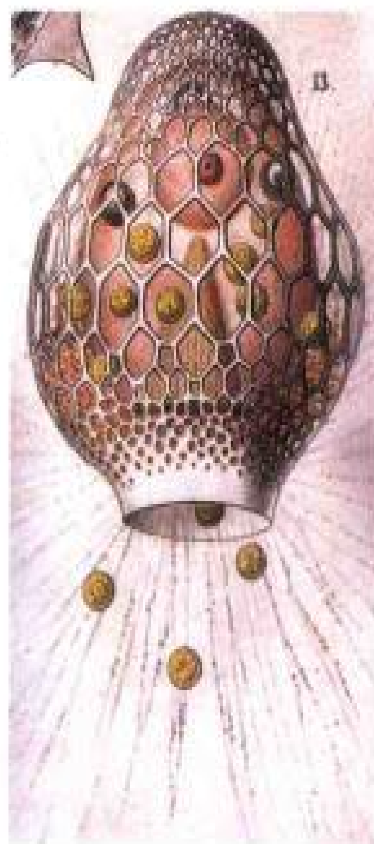
我们必须记住两点：生物现象非常复杂；并非每件貌似有理的事情都是正确的．还必须把生物现象的数学模型只是看作比喻，而非如同天文学或物理学中那样的"定律"．但看作为"定律"的日子亦会来临，只要生物形态和生物过程能以与物理学中同样的数学精确度予以描述．

我们且考察表面张力对于单细胞生物的影响．粗略地说，它们是一滴滴细胞质——一种很粘稠的液体，在水中悬浮着．事实上，人们所看到的许多简单的有机物即是这种东西．

然而，汤普森观察到：球状形态通常是惰态，而单细胞实体颇为灵活，并以鞭毛或纤毛的形式常作小的抖动．依照汤普森的见解，这样的抖动有助于支撑或许是别样的非稳形态，看来其功用好像有界构型（框形）在有关肥皂膜和肥皂泡的实验中所起的作用一样．并且，汤普森还在单细胞里发现种种H－回转曲面．他注意到，此形态往往不稳定，但这并非纤毛在"自由边缘"上永久地运动不息之故．

他相当谨慎地陈述：尚未弄清，是否真是表面张力导致上述这些现象，抑或是否还有薄膜张力可能在起作用[与具有表面张

力的液膜（液体表层）不同，薄膜张得甚紧，之后不再收缩]．现代实验工作确实表明：两类张力都作用在细胞的表皮上．但汤普森论及：两种力在宽广的范围里产生同样的形态．



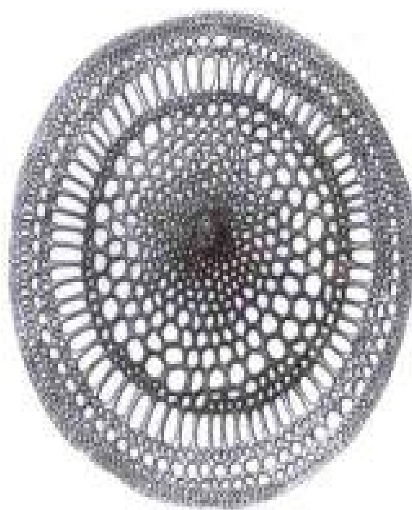
Cyrtocalpis 属放射虫．

汤普森还研究了放射虫的硅质骨架，在解释此骨架如何形成这个方面颇有进展．他用一种泡沫状细胞质与放射虫机体相比：

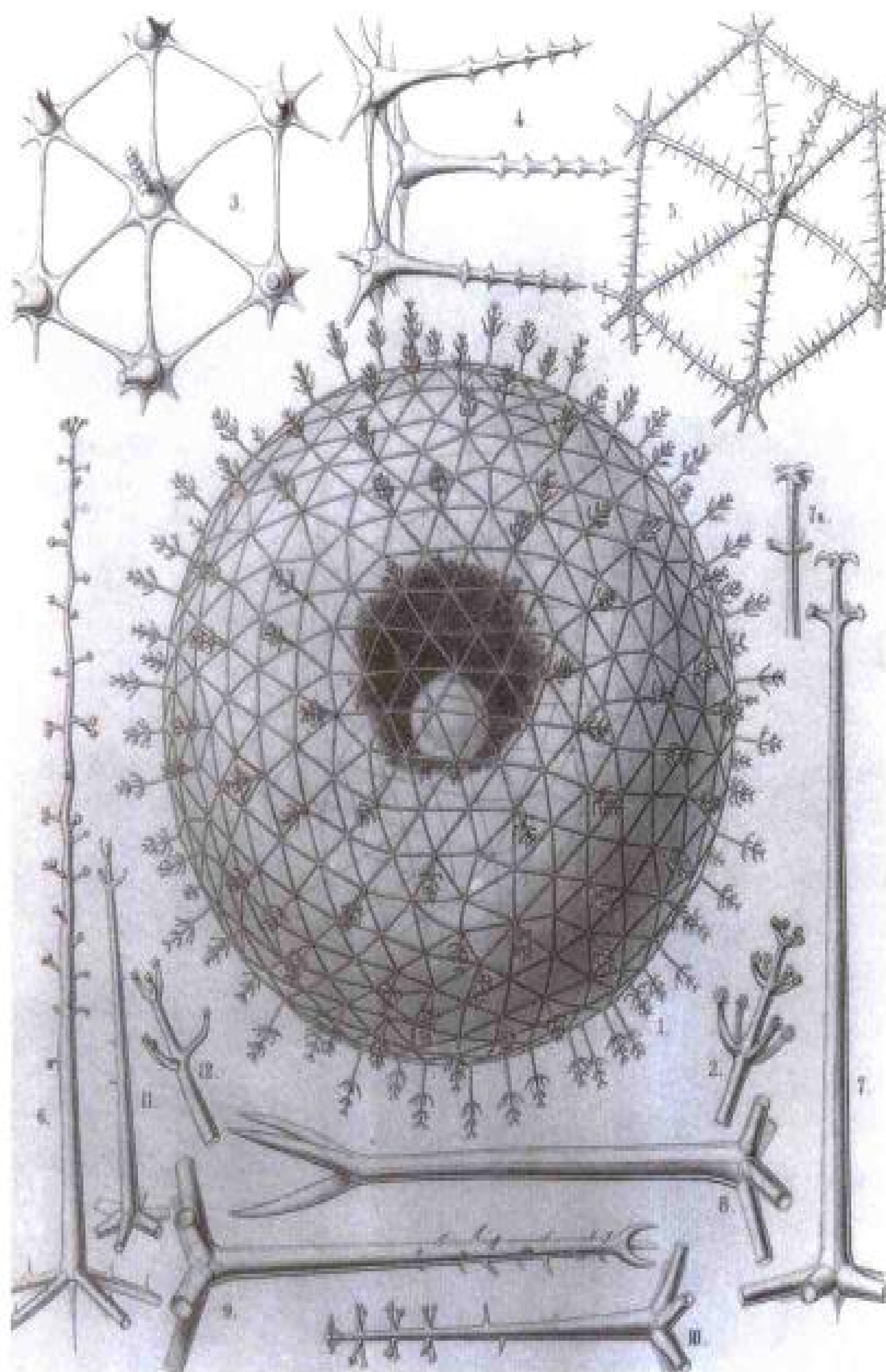
> ……泡沫状细胞质发出大量气泡或空泡（小空洞），被一种与海水几乎没有很大不同的液体所充满，……依照表面张力条件，这些空泡大体上彼此分离，并呈球状，或者相互并合在一起，形成一个多边形"泡沫"细胞簇；在簇内，细胞满足"平等"条件，其尺寸都趋向于等同，以致簇的多边形轮廓显出优美的规则形状．

（发泡的泡沫遵循两条规则，此乃由普拉蒂奥在实验上发现，这在第 5 章已予描述．）

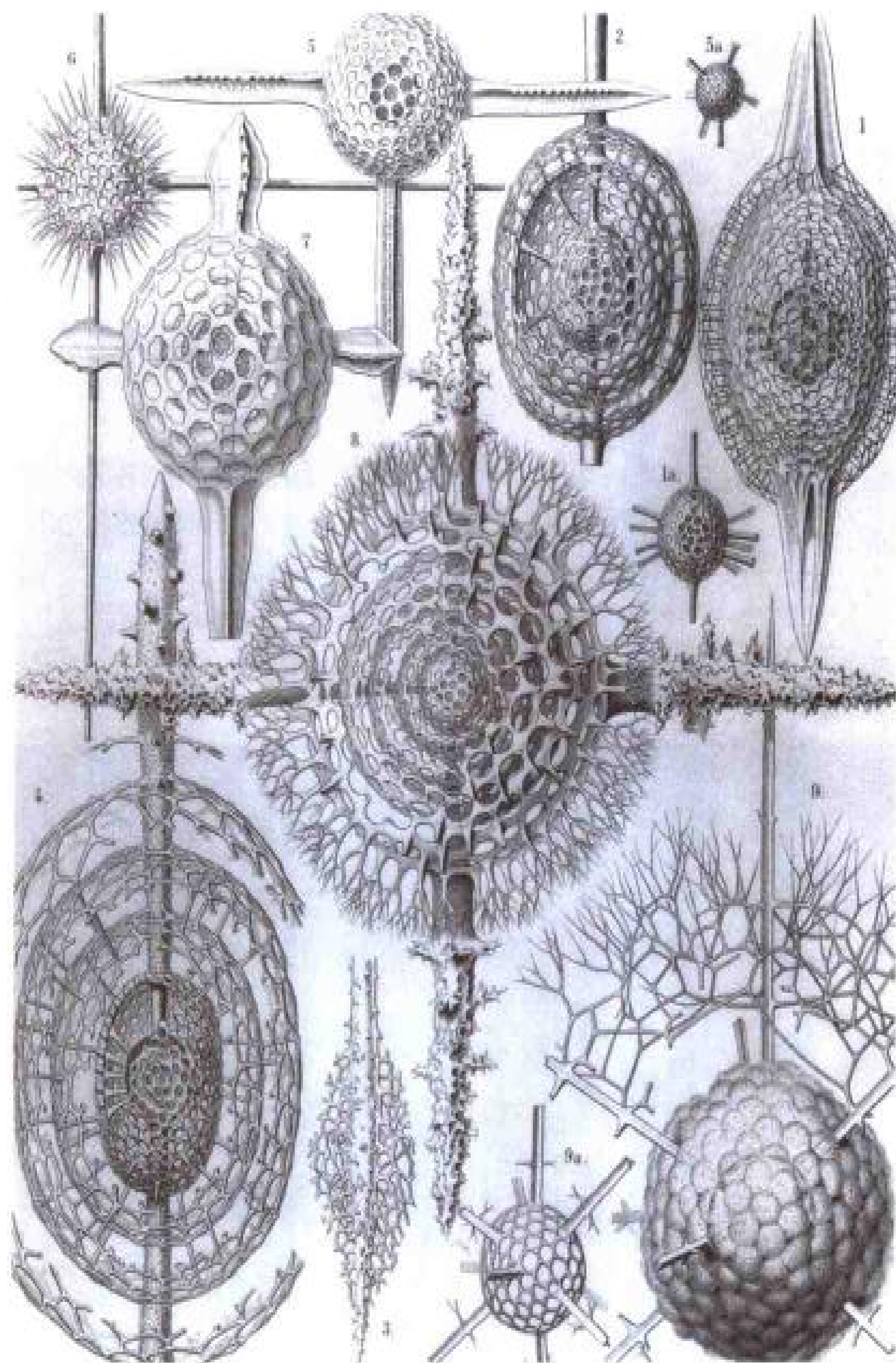
然后，汤普森又提出：在泡沫边缘，吸附力特别强，从而使无机物质沿着边缘沉淀，因此就形成放射形轮廓的硅质骨架．所以，此骨架的美妙规则性无非是普拉蒂奥的两条规则的物质化体现．但这个提议并不能解释为什么在许多属放射虫里有那么多不同种类的骨架形态．恩斯特·黑克尔画出 4 700 幅放射虫（他已用显微镜探查过的）的图后颇感迷惑，我们依然如他一样迷惑．但这些微小的"海之兰"——此乃人们对其的雅称——确实并非进化论中的戏言．相反，放射虫属于地球上最远古的生物之列；它们是一种活化石，其骨架必为十分完好的结构．遗憾的是，人们还未明白，为什么自然界会形成这些形态，虽然凭经验能想像，对于放射虫，这样的形态必然是相当有利的．



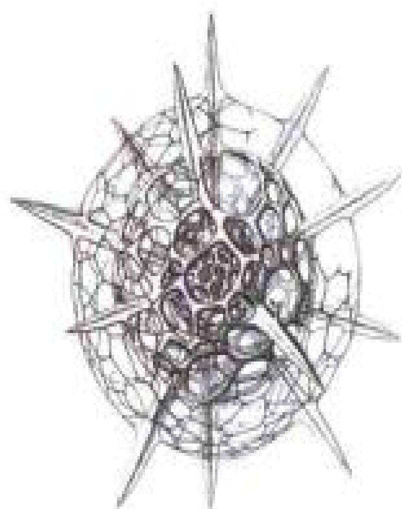
Cecryphalium 属放射虫．



由恩斯特·黑克尔绘制的Aulosphaera属放射虫［见关于由查林杰（H.M.S.Challenger）于1873—1876年间搜集的放射虫的报告］.



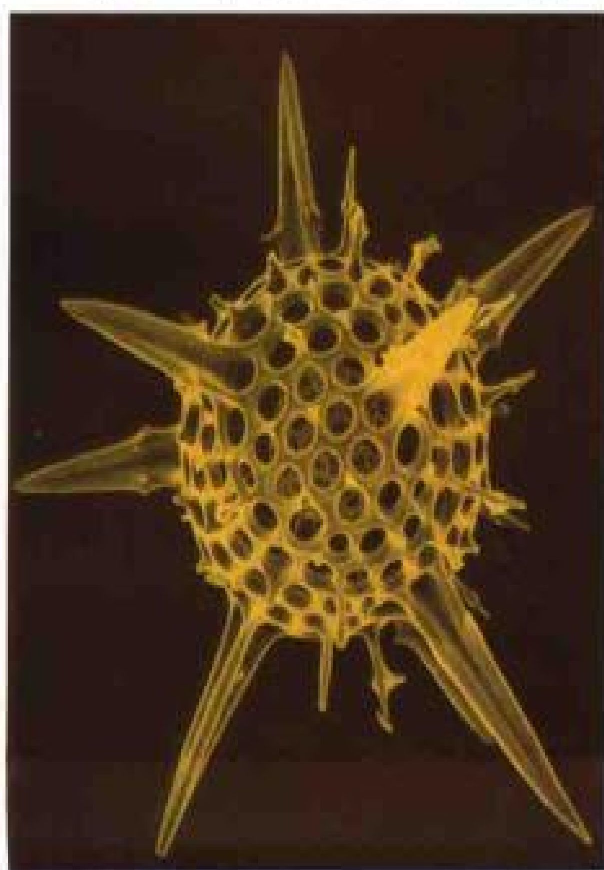
由恩斯特·黑克尔绘制的Stylochromium, Caryostylos, Staurolonche, Staurocaryum, Rhizophlegma属放射虫（见关于由查林杰于1873—1876年间搜集的放射虫的报告）。

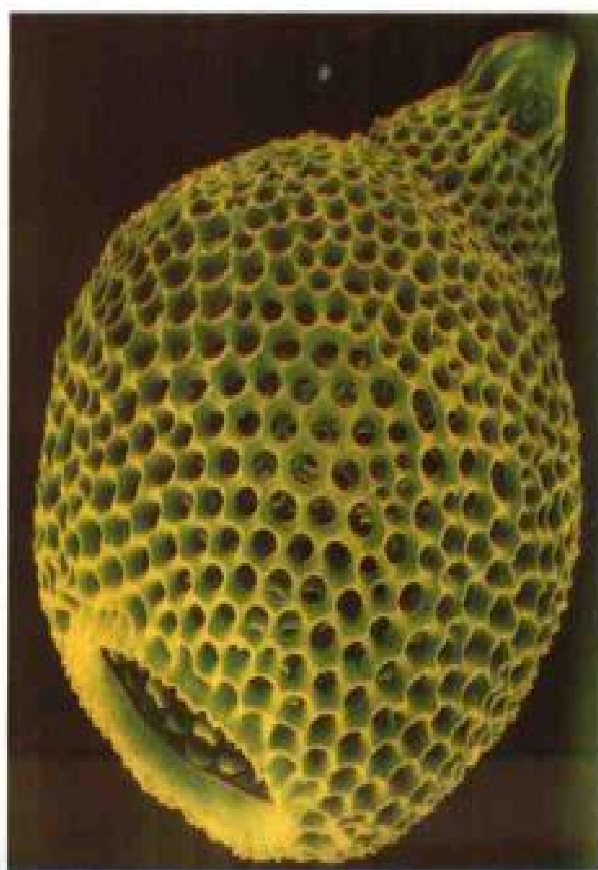

由恩斯特·黑克尔画出的一个放射虫.

如今在电子显微镜下研究活的放射虫，已经得到关于它们的几何结构的又一个惊人事实．每个放射虫伸展出许多根（常常是几百根）很细的、富有弹性的、笔直的细丝，穿过骨架的小孔；这对于代谢作用是必需的．细胞传输物质，乃通过微细管道而实现的．亦颇为惊奇的是，这些微细管道非常规则．例如，其某些横截面竟为正多边形阵列，宛若蜂窝型式．呈六边形排列的微细管道由桥连接，桥用作吸气．

因此，自然界看来是完全有序而规则的，甚至在最细微的结构中亦然如此．今天，似乎已经证明，凭藉细胞表皮的张力只是部分地解释了细胞形状；诸如微细管道那样的内部结构，很

由卡格（M.Kage）制作的两个放射虫之骨架的电子显微图.





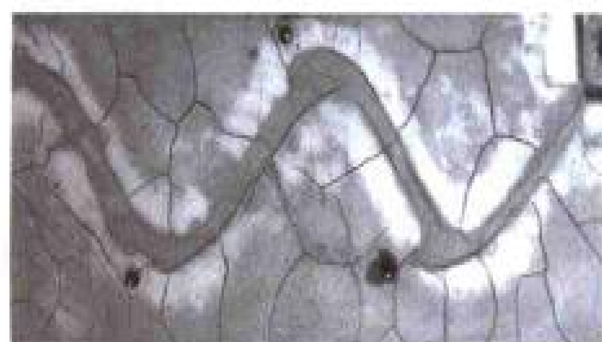
可能在颇大程度上决定了细胞的形状.

龟裂和缝隙

自然界里常常出现断裂及其裂缝图案. 登山运动员尤其讨厌藏在积雪下的裂缝. 老树皮或支撑屋顶的横梁里都有缝隙. 特别有趣的是多边形裂缝图案，这在干土、旧油画的油漆表层、陶瓷釉面、搪瓷制品上都看得到；还在混凝土、玄武岩、石灰石，以及不毛之地和冰冻土壤里也找得到. 某些图案由小的面砖铺成，另外有些图案则由大的多边形组成. 在干盐湖——美国西部大贝辛地区那个干涸的湖泊，从空中摄像，摄得湖中有100英尺～300英尺宽的多边形. 阿拉斯加的水底冰劈和北极地区的冻


(A)


(B)


(C)

(A) 盐层的120° 龟裂图景，形成盐晶粒的六边形图样（直径约为一码）. 美国死谷——“魔鬼的高尔夫球场”.

(B)内华达州内大片干土因太阳曝晒而裂成盘格状.

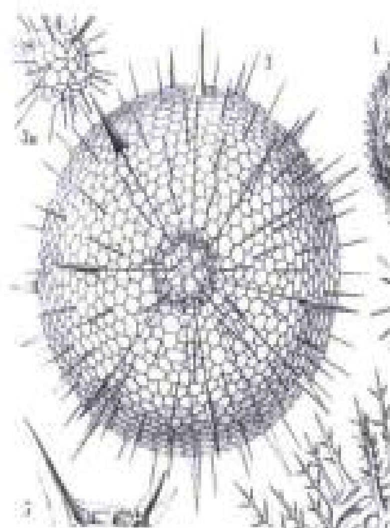
(C) 器皿内湿土的裂缝.

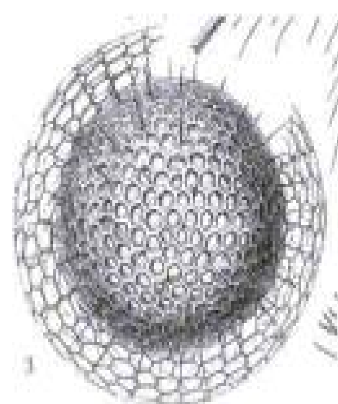

牙斑因收缩而致的龟裂.

原所呈之多边形甚为著名，此乃从北极地区之永冻土层所见到的、经常被人们描绘的现象.

目前大部分科学家都同意这样的看法：多边形图案似乎总是在经受其体积变化的物质中出现，而体积变化乃由干涸或冷冻，抑或这二者所引起．但在这些科学家中比较谨慎的人则认为还不能真正理解体积变化过程．其中另外一些科学家懂得作用力的虚功原理；然而不同的科学家由此原理所得之结论不尽相同．某些科学家断言裂缝是相互正交的；另一些科学家断言裂缝多边形必定是五边形或六边形．尤其是带有三射线顶点以及交成三个120° 角的六边形图案、被认作由此力学原理所得之结论．并非每一个平面区域都能全由六边形面砖所铺满，因为欧拉公式对于铺砖的可能布置有一个限制（见第174页）；所以，我们会发现，往往在许多六边形之间有少数几个五边形．同样，放射虫之骨架主要是六边形元胞，但并非全部都是；可以看出还有少数五边形和七边形.

我们认为，这些“理论上的”结论既非令人信服、又未被十分确认，虽然它们可能包含了某些真理．关于很粘稠的或易碎裂的物质的断裂现象的理论未曾很好地发展起来．并且，我们知道，对于物质中最微小的不规则性，可以免除一切理论计算．例如，对于具有平整边缘的纸带，从两端拉它，颇难拉断，但如果一边有一个小的缺口，则很易撕开．





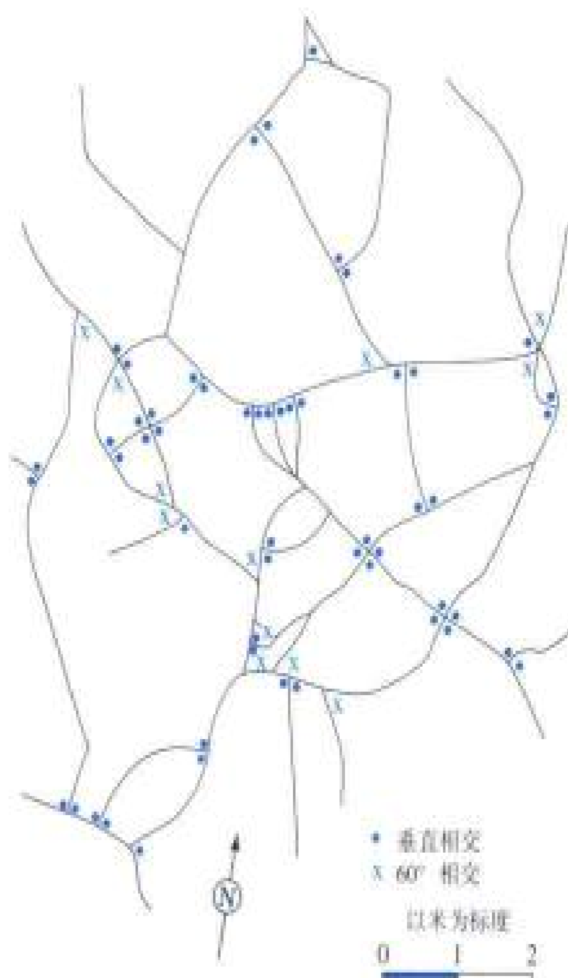
放射虫之骨架中的五边形和六边形．

大部分物质里都有不规则性，这是人所共知的；那么，似乎必然会假定：此不规则性对于裂缝的形成起到重大作用．大部分地球裂缝看来是随机地分布在地面，貌似无裂缝地区亦会在地表下的脆弱区域随机地生成新的缝隙．而且，裂缝通常并不同时出现．人们看到，起先只产生少数缝隙．龟裂区域里沿着裂缝的切向应力颇强，而垂直方向应力与缝隙的形状有关．因此，在垂直于最大应力方向的方向上形成次生裂缝，与初生裂缝倾向于交成直角形式．尔后，再次生裂缝与初生裂缝和次生裂缝亦都交成直角．这样，就形成了随机分布的裂缝网，裂缝垂直相交．所以，关于裂缝图案的形成历史被很好地记录下来．于是往往就能确定：哪些裂缝形成得早，哪些裂缝形成得晚．

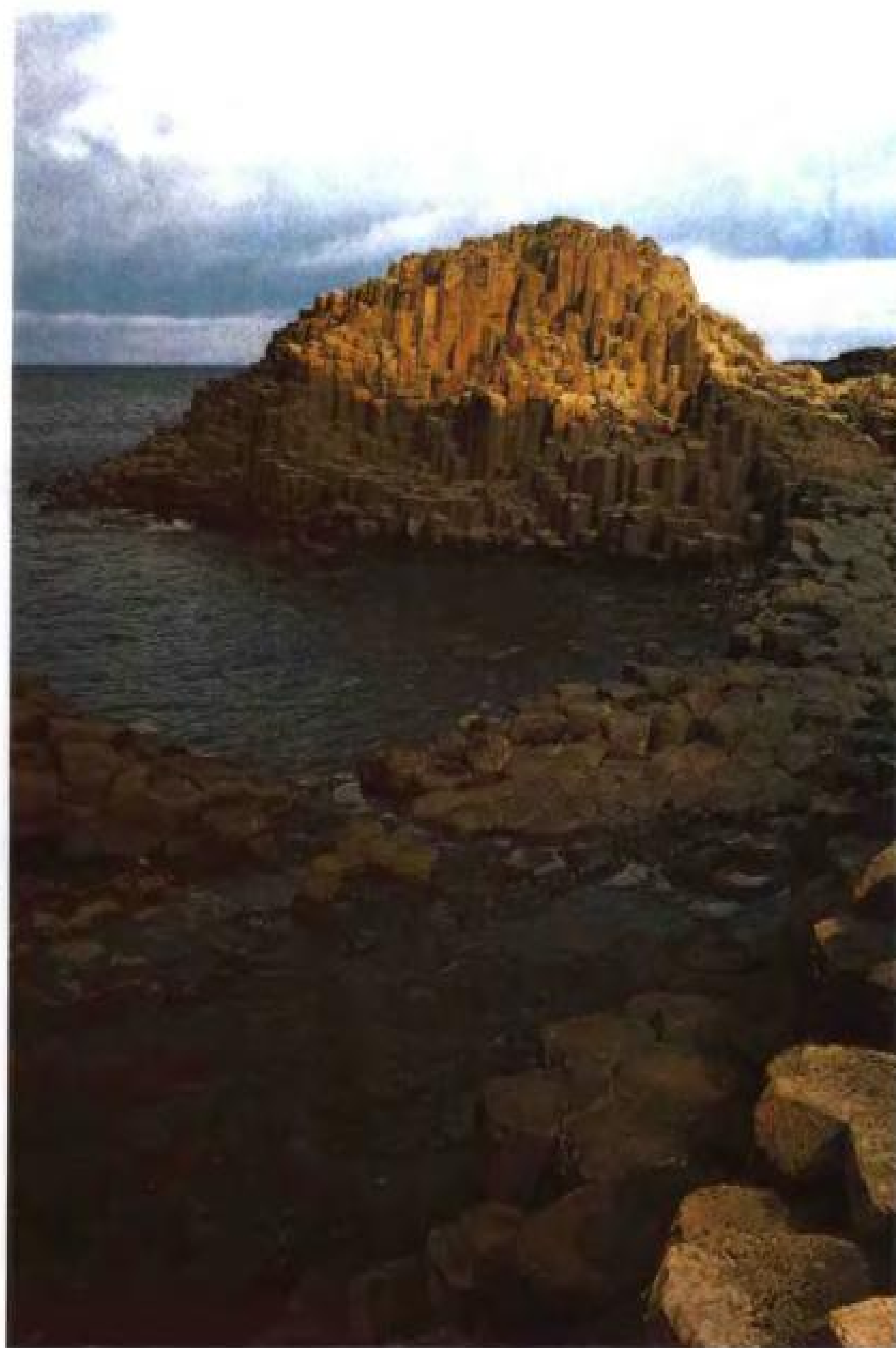
遗憾的是，普遍的情况并不十分清楚．首先，有些物质里的缝隙并非呈严格的120° 形式．（严密的证明表示：许多狭窄的次生裂缝与初生裂缝交成直角．）其次，细致的研究表明：90°角、120° 角和60° 角都可能出现．例如，在马更西河三角洲的一些小岛上测量了大量龟裂图样，发现百分之八十是垂直相交的，次多的是交成60° 角，少数三射线两两以120° 角相交（见下一页的图所示）．

有一种以虚功原理解释60° 角的方式．我们设想冻结的土层开始形成两两交成120° 角的三射线列阵．这冻结土层的

加拿大西北地区肯德尔岛地面上的原始裂缝.



不均匀性可能阻止再形成固有的三射线状缝隙. 如果这样的解释尚称充分的话, 就可免去讨论裂缝形态的力学原理. 于是, 裂缝或者是单个形式(垂直于最大应力方向); 或者是三条一组, 两两交成120° 角, 此乃在均匀物质中(以最小的形变尽最大可能地解除应力); 或者是带有60° 角的混合形式, 乃由 "缺口效应" 引起. 后来的裂缝还会随之产生, 但与以前的裂缝交成直角. 我们提请读者仔细地观察天然的龟裂、并阐述其本身的理论.



宽广的堤道，在爱尔兰．一火山的岩石造型，乃由玄武岩墩组成，岩墩的横截面有些呈正六边形．

晶体几何学

晶体结构的形态属于自然界里最逗人喜爱的形态之列。晶体往往是幽光闪烁、五彩斑斓，被搜集者多方寻觅，被科学家探究频频。自然要问的一个问题是：对于晶体的形状，是否可用变分原理来解释？人们已知：生长中的晶体之形态由几个动力学要素——诸如物质迁移机制、凝聚机制、扩散系数以及化学反应率来确定。但要完全理解表面结构必然很困难。



采自田纳西州榆林矿的双晶方解石。



(A)



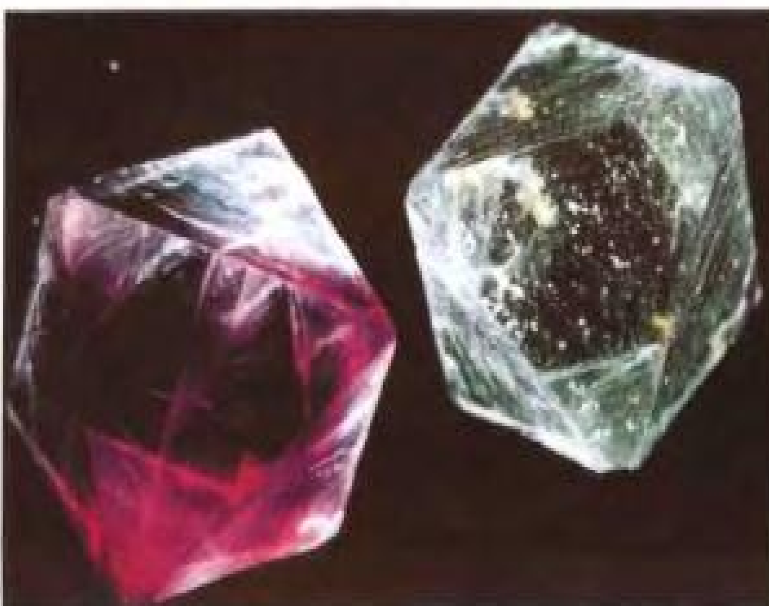
(B)



(C)



(D)



(E)



(F)

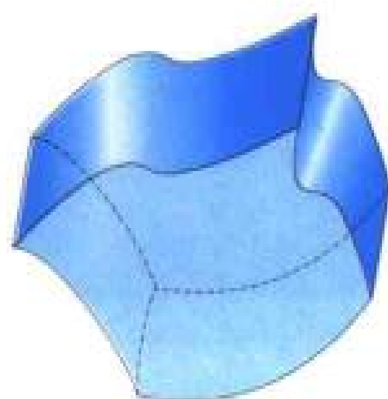
晶体.（A）钙铝榴石（属于钙榴石类）;（B）黄铁矿晶石;（C）尖晶石;（D）锐钛矿晶石;（E）氟石;（F）方硼石.





然而，对于甚小晶体或者带有甚小不规则表面的晶体而言，十分明显的是：晶体有降低自由表面能的倾向，自由表面能是确定晶体之形态的动力学要素系统中占支配地位的要素，以致我们问：倘若晶体的自由表面能为极小，其体积给定的小晶体的形状如何？我们想起三维等周问题，其解为球形，此例中势能正比于表面积，而体积是给定的，十分平滑、完全对称的球形显然与晶体结构颇为不同，尽管如此，若晶体甚小，其形状也能用变分原理在一定程度上予以说明，就与等周问题相仿佛；二者结构上的显著不同乃出自于相应之势能的区别.

数学问题可阐释如下．设一空间区域以几个选定的有限光滑曲面为边界．这样形状的物体被称为分片光滑物体．对于这种分片光滑表面上的几乎每一点，都有一个切平面．晶体结构的表面能取决于这特定晶体的化学性质，而我们则假定表面能仅仅取决于切平面在空间中的取向.



分片光滑物体.

那么，我们要求对于一定的体积，其结构和形状对应于总的表面能为极小．晶体学家乔格·伍尔夫（Georg walff）于1901年作出了著名发现——给出了关于表面能之数学特征的一些进

一步的合适假定；以下所述乃是成立的：

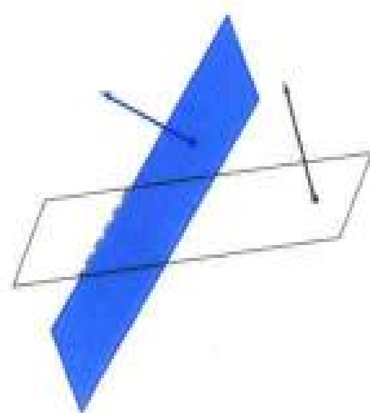
> 对于任意给定的体积，唯有一个凸形物体，其边界面均为平面，此凸体的边界表面所具有的能量比体积相同的任何其他分片光滑物体的表面能都小.

这条定理有两点值得注意. 第一，表面能有无限多可能值；但对于各个被容许的能量值，唯有一个以平面为边界的凸形区域的表面能为极小. 第二，与数学中大部分不可能求得明确解的问题不一样，这里讨论的最优晶区这个极小值问题，可以用一种所谓的伍尔夫结构的简单程序予以确定.

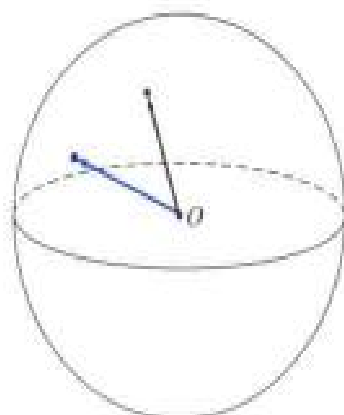
伍尔夫结构基于两条假定. 第一，

> 在表面上每一点，单位面积的表面能仅仅取决于表面上该点的切平面的方向.

对于空间里的每一个平面，可以用一个单位长度、垂直于该平面的“矢量”（或箭头）与其相关联. 这样的箭头标明空间里平面的取向，如下图（A）所示. 且在空间里固定一点 O，可



（A）



（B）

所有平面的法向箭头形成为一个球面.

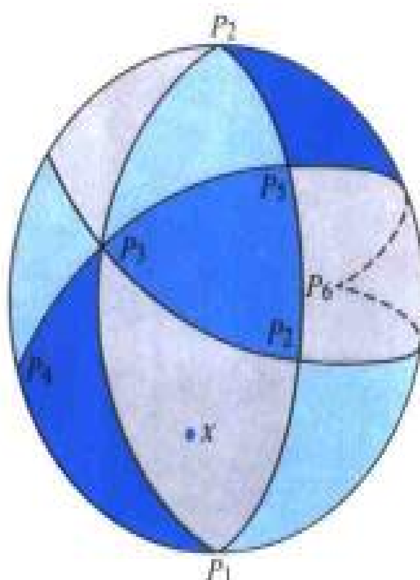
使箭头平移后其尾端固定于 O 点，并保持箭头的指向不变. 那么每个箭头完全由其尖端标定. 所有这样的尖端充满空间里的一个球面，如图（B）所示. 与此相应，可以用如下的一条规则来想像表面能：对球面上的每一点 x 指定一个正数（分片光滑物体的每一单位表面积之能量）.

伍尔夫结构所立足的第二个假定为：

对于一个给定的晶体，有 N 个分立的点 p_1，p_2，…，p_N，分布在垂直方向的球面上；还在此球面上有一个"三角网"，这 N 个点就作为各球面三角形的顶点. 球面三角形内部任意点 x 的能量值 $E(x)$ 相对于包含 x 点的三角形的顶点，满足一个特定的不等式. 为简单起见，且说 p_1，p_2 和 p_3 是这样一个三角形的顶点，那么对于三个正数 a_1，a_2 和 a_3，则有

$$x=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3,$$

球面三角网（还可参见第254页上的图）.

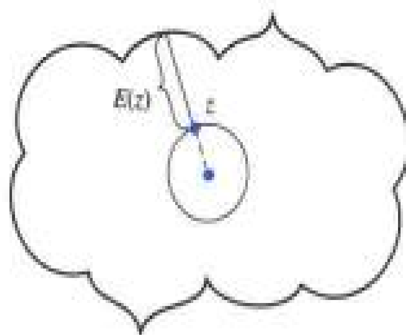


此假定即为

$$E(x) > a_1E(p_1) + a_2E(p_2) + a_3E(p_3).$$

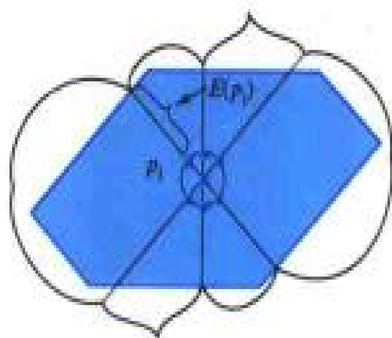
如果x位于这样一个三角形的边上，假定亦有类似的不等式成立. 因为对于能量E，以一些正数值标定球面上的一点，则可想像把E绘成球面以外的"图形".

我们是以如下方式得出这个图形的：对于球面上的任意一点z，沿着经过z点的径线向外移动，移过距离（从z点算起）$E(z)$. 这样的图形难于目测. 它的横截面画得像一个二维图，用一个平面与它（在球面之外）截交即得，如右图所示. 我们且继续讨论具有可能的总表面能的极小值的晶态结构. 对于球面上的每一个顶点p_i，沿着经过p_i点的径线，从球心出发向外移动，直至与p_i相距$E(p_i)$的点为止. 然后在此点画出垂直于径线的平面. 由这样的所有平面围成的凸形组合就是其最优形状之立体.

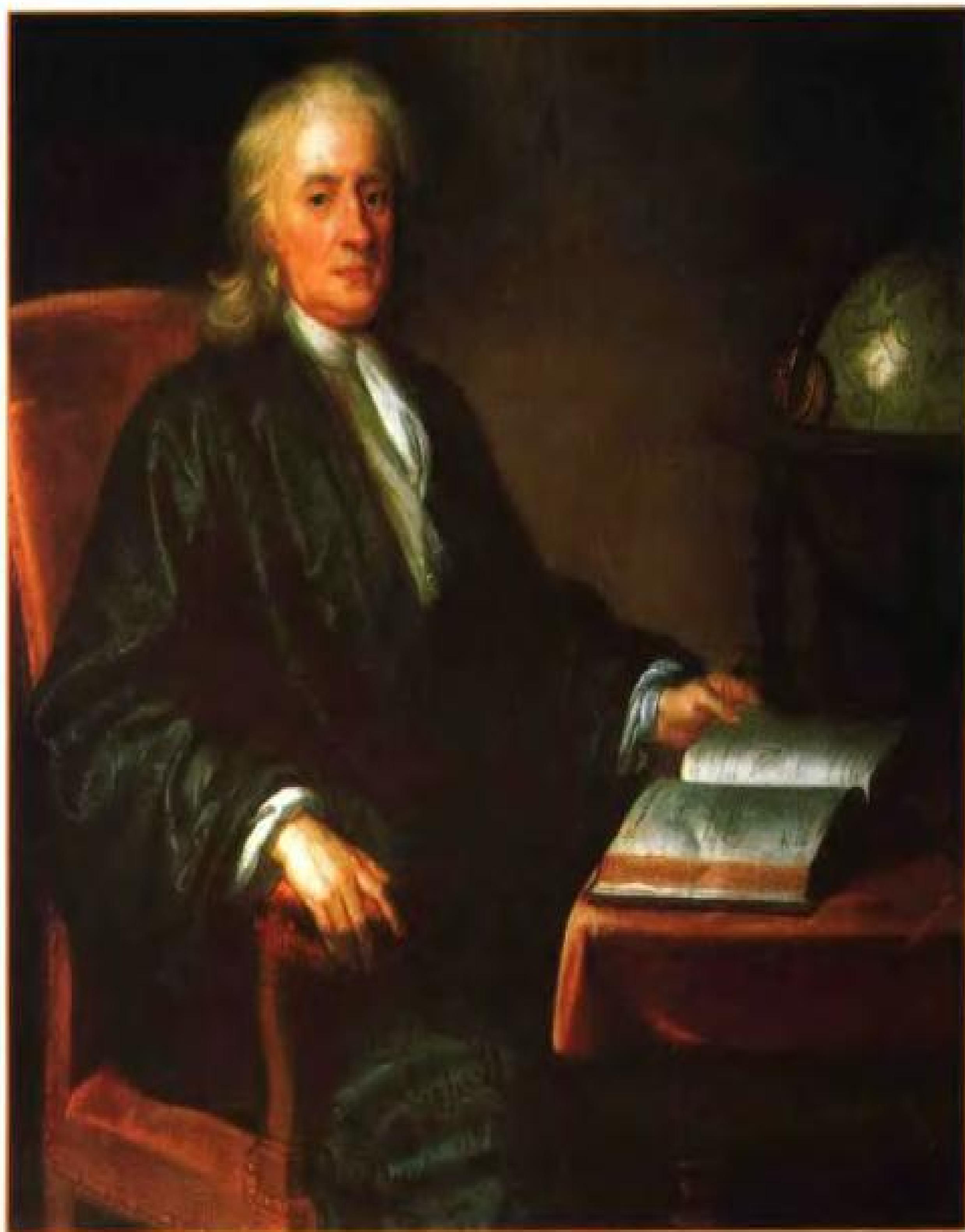


一晶体之能量函数图的一个横截面.

这种形状之立体的一个平面横截面在右边画出. 但这种形状之立体可以并不具有所要求的体积. 求解此问题，改变此形状之立体的尺寸比例使其具有所要求的体积而得到晶态物体. 伍尔夫尚未完成上述结论的证明. 1914年，海因里希·利布曼（Heinrich Liebmann）指明：对于晶体，若存在一个平衡形态，它必为由伍尔夫结构得出的多面体；然而存在性问题依然未得解决. 最后，亚历山大·丁弗斯（Alexander Dinghas）证明：凡不同于由伍尔夫结构得出的形态的任何形态有较高的总表面能. 因此，从水晶和金刚石看到的边缘并不整齐的美妙晶态，在某种意义上可用极小原理予以解释，就如对于从行星、肥皂泡、油滴看到的球状形态的解释一般.



伍尔夫结构.



伊萨克·牛顿（1642—1727年）。由I·范德班克（I.Vanderbank）绘制（1725年），存置于英国国家肖像陈列馆（伦敦）。

跋文

动力学与运动



在前面的章节里，我们已经讨论了变分原理在各种物理场合的应用以及变分原理对于数学分析之发展的作用.行文至此，我们把注意力主要局限于静止的物理体系，亦即平衡态；但对于运动的描绘同样是重要的.

希腊人对石子穿过天空的轨迹以及行星运行轨道的形状颇感惊奇. 希腊科学重在天体轨迹的几何形状, 而并不重视其沿着轨道随时间推移而所作的运动. 在天文学里, 这样的运动有特殊的意义, 它被解释成匀速运动; 或更复杂些, 乃是匀速运动的合成, 就如在与天文观测资料相符合的本轮理论里那样.

重要的是要知道: 古希腊哲学家并不了解——举例说——行星运动与下落石子的运动之间的联系. 直到17世纪, 即开普勒、伽利略、惠更斯、牛顿的时代, 这样的联系才被推断得出. 在希腊人看来, 行星触及天球(面). 至于是什么维持其运动并未作出解释. 对于地面物体, 亚里士多德言道: 物体都趋向于固有位置, 重物的固有位置就是地球中心, 烟雾的固有位置则在天空. 并不奇怪: 希腊人始终没有提出精确的运动学, 亦即精确地描绘随着时间的推移的一切可能运动; 因为他们未能发明类似于微积分的工具. 无疑, 阿基米德能采用接近于积分计算法的观念计算某些面积和体积, 但在古代终究未产生用作微分计算的概念. 因此, 希腊人没有能精确地描绘运动中的变化情况; 例如, 他们尚未清晰地理解速度概念, 没有提到加速度. 唯有当牛顿和莱布尼兹发明了微积分、并由伯努利和欧拉加以完善以后, 才为科学家们提供了这一精确的数学工具, 使其建成物理运动理论.

这样一个理论的基础由伊萨克·牛顿所奠定, 他于1687年发表了论著《自然哲学的数学原理》(简称为《原理》); 这可能是最重要、并肯定是最有影响力的一部科学著作. 在这部名著中, 牛顿解释了物理实体的一切可能的运动, 此乃凭藉施于物体的力作用; 故而这个理论被称作动力学(取自希腊语词 dynamis, 意指"动力"或"力").

浏览牛顿的论著，我们可以料想：建立动力学，乃是借助于微积分（或按照牛顿的术语，乃通过“数量级数、流数以及微分之分析”）得以完成的．然而，这只有几分正确；其实相当明显，并未用很多凭藉流数术（即微分法）的分析．相反，牛顿把他的所有成果表示成公式，却是采用希腊数学的风格，即运用几何－综合方式表述每一论证．尽管如此，《原理》的数学结构全然是非古典式的，因为它是通过对于变量之分式采用“极限运算”——这在古代尚未得知——而建成的，并结合以欧几里得几何的基本内容；仅仅很少藉助于他关于无穷级数和流数的某些早期著作（他于1671年已经写成）．然而，当关于牛顿与莱布尼兹发明微积分的优先权的争论发生后，牛顿想要证明：他从一开始就已将他的微积分应用于物理问题，并且，《原理》中的一切命题都是使用他的分析方法得出的，而此方法乃是在“数量级数”里展示出来的．他写道：

> 这些命题是经由分析而确定的；但……我把我所发明的东西予以著述，……使其在几何意义上可靠，并适合于公众．……然而，凡懂得分析的任何哪人，倘若把这些命题的证明从其著述形式还原成分析，他就会明白，这些命题是凭藉分析而发明的．

牛顿对优先权的声明被写入科学文献，但人们并不确切知道实际情况如何．德里克·托马斯·怀特赛德（Derek Thomas Whiteside）——牛顿的《数学论文集》的编辑者述及：未能找到《原理》成书之前有什么牛顿的手稿；这兴许就表明牛顿最初是在《原理》成书时采用流数方法而得到这些数学结果的，然后再将其转化成传统的几何形式，此即《原理》中所见到的形式．《原理》的精神在于微积分——这样说并不违背事实．其实，迈克尔·诺恩伯格

ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
AC
DIFFERENTIAS:
CUM
Enumeratione Linearum
TERTII ORDINIS.

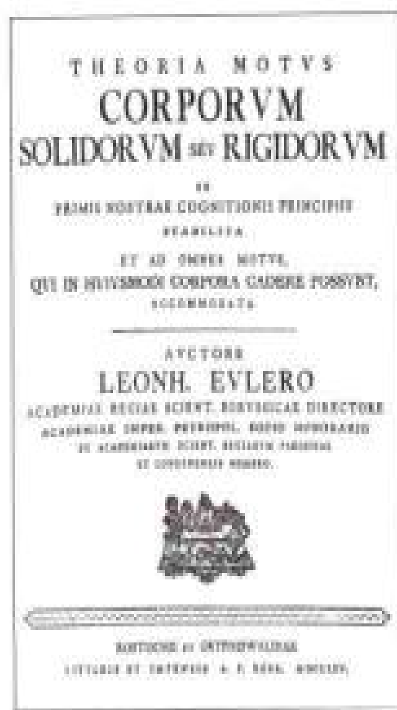


LONDINI,

牛顿关于分析的笔记之卷首页，由琼斯（W. Jones）于1711年出版．

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
TOMVS I.
PETROPOLI

欧拉的《力学》（1736年）


THEORIA MOTVS
CORPORVM
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM
EX
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS
STABILITA
ET AD OMNES MOTVS,
QUI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,
ACCOMMODATA
AVCTORE
LEONH. EVLERO
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE
ET LONDINENSIS MEMBRO.
ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV.

欧拉的著作《运动论》(1765年)之卷首页.

(Michael Nauenberg)新近对怀特赛德的陈述表示疑问，他指出:在《原理》成书时，甚至更早，牛顿已利用微积分解决力学问题.

第一份在形式上基于微积分学的基础力学讲义是欧拉于1736年所著论文"作为运动之科学分析的力学". 对于牛顿力学的精采阐解，则就是由三十年后欧拉的第二部力学著作《运动论》(1765年)所给予的补充. 而在牛顿的《原理》一书问世一百年之后，拉格朗日出版了他那著名的《分析力学》(1788年). 其中，力学的基本定律用一种被改变了形式的变分原理，即作为最小作用量原理的变型予以表述，该原理已被解释成约翰·伯努利的虚功原理(见第4章)的相似形式. 虚功原理亦由让·勒朗特·达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert)以稍稍不同的形式加以陈述过(1743年). 拉格朗日的作用量原理可以看作是牛顿原先的质点力学的合理推广; 后来例如被用来研究刚体系统的运动.

拉格朗日对于力学之研究的一个有趣特色在于，把时间表示成与三个空间维相当的另一个维度. 起先，这种观点至多不过是一种数学技巧而已，但拉格朗日的这一观念若结合以一些非比寻常的物理经验，最终竟导致相对论. 物理学家和数学家已经变得习惯于四维世界. 1908年，赫尔曼·闵可夫斯基(Hermann Minkowski)以如下的言语开始他的演讲"空间和时间":

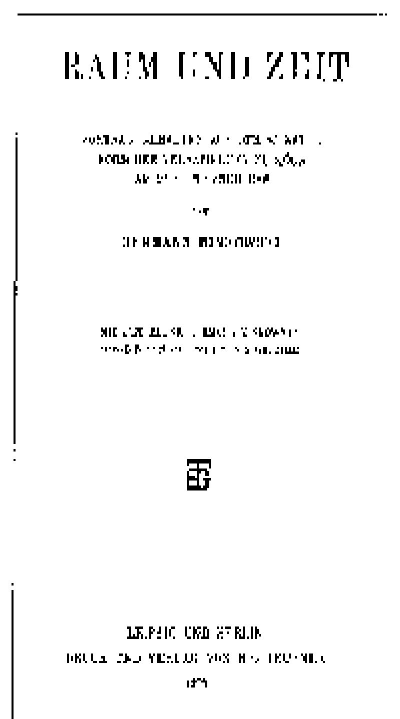
> 从现在开始，孤立的空间和孤立的时间必定消失成为影子，而只有二者的结合依然保持其独立的存在.



赫尔曼·闵可夫斯基(1864—1909年).

依照闵可夫斯基的观点，动力学就是四维世界里的几何学，恰如静力学是人们原有的三维世界里的几何学一般. 因此，古希腊人的信念——物理世界里的任何事物皆可归之于几何——

在某种意义上被人们所理解．取代了牛顿之旧定律的爱因斯坦之基本场方程亦乃源于“作用量原理”；事实上，该原理是一条纯几何学的变分原理，由它来确定闵可夫斯基四维空间的造型．


RAUM UND ZEIT

闵可夫斯基的论文（1909年）之卷首页．

下面，且考察起先导致牛顿力学、而后导致爱因斯坦相对论的某些观念，接着审视一下这两个理论凭藉于变分原理的相互联系．

牛顿之前的动力学，以及《原理》之缘起

在17世纪上半世纪，当开普勒和伽利略阐明一些描述行星如何以非均匀速度、沿着椭圆轨道运动抑或石块如何循着抛物线轨迹落到地面的精确定律时，一个新的力学时代就开始了．几乎同时，笛卡儿设想一种“自然哲学”．他提议将一切物理现象解释成均由守恒定律和碰撞定律所引起．笛卡儿世界模型控制法国科学几乎有一个世纪，直到该模型被牛顿理论取代为止．

继笛卡儿的最初尝试之后，英国数学家约翰·沃利斯（John Wallis, 1616—1703年）以及克里斯托弗·雷恩（Christopher Wren，1632—1723年，伦敦的圣保罗大教堂的建筑师）和克里斯蒂安·惠更斯研究了碰撞定律；特别是惠更斯得出最显著的成果．他利用总能量守恒定律，成功地分析了弹性碰撞以及物理摆的振动．在这些研究中，惠更斯避免使用力的概念；然而此概念在伽利略的思想中乃是一个重要角色．伽利略写道：



行驶在公路上的汽车的速度矢量 $\mathbf{v}(t)$ 标以箭头；其长度等于汽车在时刻 t 的速率，而其指向标明汽车行驶的方向．

> 如果静止物体不受到力的作用，它则保持静止；如果运动物体不受到力的作用，它则继续以均匀速率，沿着直线运动．

17世纪中叶，人们已完全明白：改变速度需要加力．但对

于速度的改变量与作用力之间的关系还不清楚，必须仔细地研究曲线运动的速度变化情况. 例如，倘若一观察者以均匀速率、沿着直线运动，其"速度矢量"并不改变；那么，观察者不会体验到有别于静止时那样的感受的任何力作用. 反之，倘若他以均匀速率，沿着圆形路径运动（诸如在旋转木马上），则其速度矢量总是改变，他会感受*离心力*的作用. 笛卡儿已曾谈及：蹲在转棍上的蚂蚁必然随棍快速运转，而转管内的石头有离开运动中心的运动倾向.

1665年，惠更斯研究了作用在以均匀速率 v、沿着半径为 r 的圆周运动的质点上的离心力 F. 于是，他发现了这些量之间的正确关系；就是说，F 正比于 v^2/r:

$$F \sim v^2/r.$$

如果引入*角速度* ω——转轮之中心角的变化率，此关系式可以写成稍微不同的形式. 速率 v 由公式 $v=\omega r$ 给定，所以离心力 F 正比于 $\omega^2 r$:

$$F \sim \omega^2 r.$$

惠更斯在他的1673年论文"摆钟"中发表了这项成果，该论文论述了钟的摆动，我们在第3章里曾提到过.

1644年，法国科学家德罗伯瓦尔(de Roberval)已提出假定：一切物质体都彼此施予引力，并把太阳所施予的吸引作用解释为这种力的特例. 再则，英国物理学家罗伯特·胡克(Robert Hooke，1635—1703年)于1666年5月23日在对新成立的皇家学会成员所作的演讲中，把行星围绕太阳运行轨道之弯曲解释为太阳之吸引作用所造成的，而且他以摆动实验支持其理论说

明. 1674年，胡克阐述了天体运动的动力学；他还假定：由太阳施予的引力是存在的、此力随着离太阳的距离增大而减弱. 然而，这一理论阐述只是定性的；胡克只能猜测太阳与其某一行星之间的引力怎样依赖于二者的距离. 他做了一些实验去测定地球施于石块的引力强度如何依赖于石块超出地面之高度；但即使爬上伦敦最高的塔顶，他也不能找到由以暗示答案的任何可测效应. 不同高度的引力强度之差别是如此之小，以致胡克不能凭籍那个时代的技术验证他的猜测.

在1679—1680年期间，胡克与牛顿讨论了关于引力的思想；来往信件被保存下来，并几乎就在那段时期被发表了. 人们从胡克的日记中知晓：他曾询问某些数学家是否能把他的物理原理用于计算行星的运动状况，但他未得任何助益. 于是，他转而请求牛顿帮助. 1679年11月24日他致函牛顿："但我的猜测是，吸引力总是与离中心的距离成双重反比". 如此胡克就第一次说明：他相信引力 F 与径向距离 r 的平方成反比，即

$$F \sim 1/r^2.$$

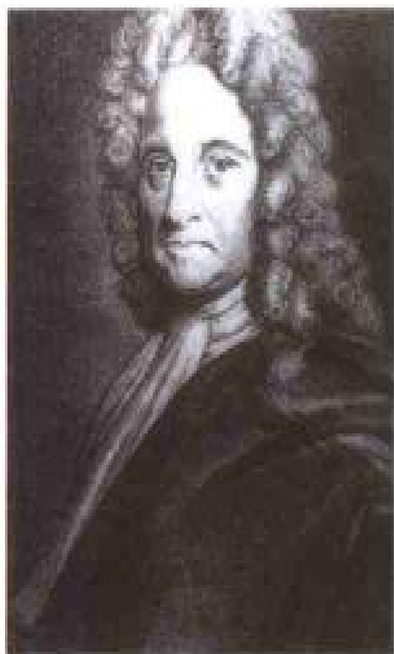
且用简单的推理方式导出引力的这个形式. 假定一行星沿着半径为 r 的圆周（此乃椭圆轨道的特例）围绕太阳匀速运行，其角速度为 ω，而开普勒第三定律(见第2章)表明 $\omega^2r^3 = K$，这里的 K 是对于所有行星都相同的数，那么

$$\omega^2 \sim 1/r^3.$$

另一方面，行星若沿圆形轨道运行，则有：离心力 $F \sim \omega^2 r$ 必定与同样大小、指向太阳的向心力相平衡. 因此，太阳的引力必然正比于 $1/r^2$.

此推理方式便促使胡克以及雷恩、哈雷大体上均得到引力的平方反比定律. 可是，他们都不能从引力的如此形式导出开普勒三定律. 尤其是要求证明：按照 $1/r^2$ 定律，受太阳之引力作用的行星乃是沿着椭圆轨道运行的，太阳就在椭圆的一个焦点处.

1680 年 1 月 17 日，胡克致函牛顿："我毫不怀疑您用出色的方法轻易地确定那曲线(即按 $1/r^2$ 定律受引力作用的行星之轨道)所取之形状，也不怀疑此轨道的合理性以及所暗示的这一性质的物理缘由……"



埃德蒙·哈雷发现：彗星会周期性地运行；几颗历史上不同时间出现的彗星被他解释成同一颗彗星的一次次重现. 例如，他确定 1680—1681 年出现的彗星("哈雷彗星")与 1456 年、1531 年、1607 年出现的彗星是同一颗彗星.

牛顿最终解决了这个问题，但始终未曾回复胡克的这封信函；后来他否认从胡克处学到过任何东西，只是承认胡克的那些信函促使他去重新研究天体力学的基本问题. 此外，牛顿还暗示：他在青年时代早就解开万有引力之谜. 所以，苹果落地的传说或许就是出自于牛顿后来的这些说明. *

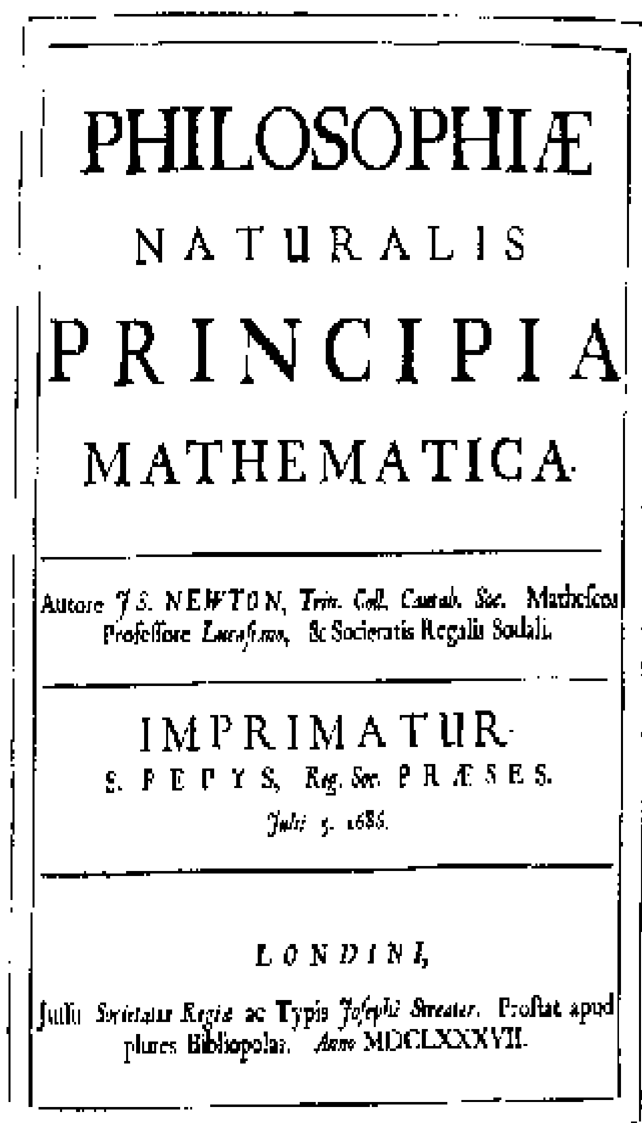
在与胡克通信以后，牛顿对于天体力学的热情暂时消退；待到埃德蒙·哈雷（Edmund Halley，1656—1743 年）通知他，雷恩有希望在理论上确定行星的路径时，热情重又激起. 不能肯定牛顿解决此问题的精确时间，但在 1684 年 8 月哈雷到剑桥访问他，并询问行星在平方反比力的作用下运行的轨迹如何时，他回答必定为椭圆. 哈雷深为震惊，又追问何以知此；据说牛顿答道："为什么？我算得的."哈雷要求牛顿发表这个成果；牛顿则便写了一篇论文"关于运动的结论"，其中他描述了物体在中

---

*然而，迈克尔·诺恩伯格认为牛顿用微积分讨论了《原理》中的主要命题，他陈述道："牛顿声称'我在 1677 年用流数术的逆反方法证明行星乃沿着椭圆运行'，在现代许多牛顿传人看来，此声称不能就作为伪造的历史记载而不予考虑."(见《精确科学的历史档案》第 46 卷，1993—1994 年，第 221—256 页，特别是可参阅第 249 页).

心力的吸引作用下运动的主要结论。皇家学会收到了这篇著作；胡克颇受打击，声称牛顿论文中的主要思想乃是他的。牛顿为之愤怒，本亦可想而知；他在致哈雷的信函（1686年6月20日）中表达了自己的感觉："这不是很妙吗？计算出并解决、处理一切难题的数学家必然满足于只不过当一名趣味索然的计算者和苦工而已，伪称掌握了一切的人却与一切发明无缘……"

哈雷鼓励牛顿将其成果写成一本书，并以多种方式无私地支持他。牛顿将"关于运动的结论"扩充成《原理》，并于1686



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

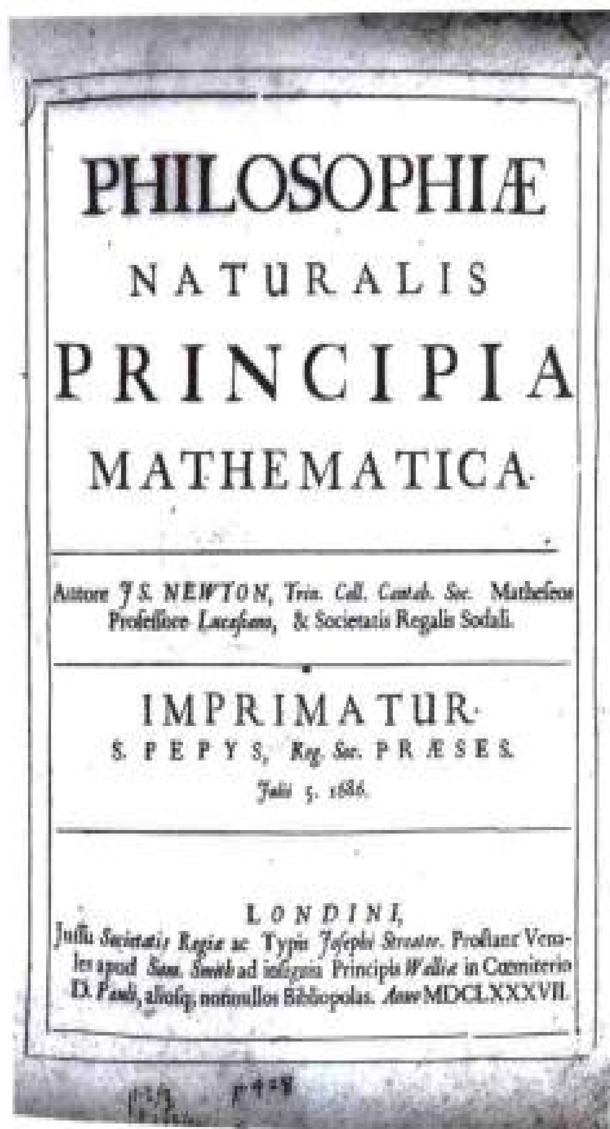
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

带有字样"Prostat apud plures Bibliopolas"的《原理》之双线印记本的标首页，该版本往往称为初版第一次印行本，而"对外版本"(带有三线印记和字样"Prostant Venales apud Sam Smith... aliosq; nonnullos Bibliopolas")则称为初版第二次印行本。二者的区别纯属无稽。人们猜想，哈雷与史密斯(Smith)关于出口销售达成协议；事实上，史密斯在欧洲大陆销售了五十本。

年4月28日将其手稿提交皇家学会. 学会的理事会于5月19日作出决定: "牛顿先生的著作须立即出版". 但学会缺乏基金, 因为之前为出版一本关于鱼的习性的书而耗费不少, 哈雷则就本人资助出版牛顿的书. 于是, 1687年, 牛顿的《原理》问世. 拉普拉斯——本人亦是伟大的科学家——称这部著作为 "自古以来人类创造能力最卓越的成果". 现尚不知《原理》的初版究竟印制了多少, 估计在250~400册之间, 唯知大约还存有200册.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

《原理》特种本的卷首页. 这是带有莱布尼兹所加之边注的著名复制本, 被瑞士的科学史专家费尔曼(E.A.Fellmann)于1969年重新发现, 并保存于瑞士日内瓦附近克洛格尼处的波德梅里安藏书馆. 右图即表示这种 "对外版本" 的卷首页.

显然，这部书被妥善存置于英国．欧洲大陆第一流的数学家和天文学家读到它，但并不接受它，因为笛卡儿哲学依然控制着欧洲大陆．惠更斯，一位笛卡儿主义者，把万有引力观念看作是不合情理的，并感到诧异：为什么牛顿会依据荒谬的观念作了如此多的计算．如前文已述，牛顿哲学的功效被整个欧洲所充分认定乃大约花费了五十年时间．牛顿和莱布尼茨之间关于发明微积分的优先权这场令人遗憾的争论可能产生了延迟作用．但在英国，牛顿一下子就出名了．亚历山大·蒲柏(Alexander Pope)为牛顿撰写的墓志铭为：

自然和自然规律在黑暗中藏匿；
上帝言道："让牛顿去吧."，
于是，一切都透亮而清晰．

这简要地表明了牛顿对英国同时代人产生了多么强烈的影响．

牛顿的动力学

《原理》包括三编．第一编论述真空空间中一个物体或几个物体的运动；此外，分析了与平方反比定律相关的许多问题，诸如球壳、转动实体的吸引力；还讨论了摆的运动；最后，将不同密度之介质中光的反射和折射当作力学问题来分析．按照平方反比定律，一个物体如何受到指向固定中心的引力作用的问题被完全解决了．牛顿并证明了两个物体在相互吸引作用遵循平方反比定律时的运动情况，这双体运动可还原成一个物体在向心引力作用下的运动．还考察了"三体问题"（即太阳和两个行星的问题），但并未解决．（其实，这本来是数学中最困难的问题，许多著名的数学家都研究过它．）

第二编分析了物体在诸如液体和空气等稳定介质中的运动

情况. 在第三编中, 将牛顿动力学应用于行星运动, 应用于关于由太阳和月亮引起的潮汐的运动理论, 应用于诸如彗星的轨迹、月球的运行以及地球的形状等其他天文学问题.

在《原理》中, 近代力学的纲领被完全公式化地阐明了. 不仅在内容上、而且在形式上也是如此. 牛顿变得像是一位数学家了. 他先是给出一些基本概念, 诸如质量、动量等的定义, 然后系统地表述了三条基本定律(或公理), 由此导出别的一切结论. 三条定律为:

第一定律 每个物体都保持其静止或匀速率且方向相同的运动状态不变, 除非施予外力改变其状态.

第二定律 运动的改变程度正比于所施予的外力, 并且, 运动是沿着所施外力所在的直线上改变的.

第三定律 对于一个作用力, 总有一个相等且反向的反作用力; 或者说, 两个物体彼此所施予的相互作用力相等且指向相反.

牛顿虽然使自己偏离其严格的研究方式(在此书的讨论过程中, 他使用模糊的概念、应用素来尚未明确的公理), 但他那公理化推理程序对几代数学家和物理学家产生了深刻而持久的影响. 牛顿建立了动力学, 正如欧几里得建立了几何学, 阿基米德建立了静力学.

《原理》中并没有什么新东西. 例如, 第一定律无非是伽利略的惯性定律, 牛顿采纳它作为一条公理. 这本书的大部分内容都出自以前的一些作者, 但牛顿把他们的知识予以系统的编排. 而书中别的内容则是牛顿自己的研究成果. 令我们钦佩的, 只是他敢于接触那么多的困难问题.

[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

在牛顿的《原理》初版的第12页上，有动力学的第一定律和第二定律.

这三条定律只是构成了动力学的形式框架，而并未说明作用力的本质．事实上，第二定律往往被看作是重复的表述．如果想把这条动力学定律应用于具体场合，就必须详细说明作用力．吸引力是一种基本力；且看牛顿是如何描述这种力的：

> 每个物质粒子吸引其他任何粒子的力，乃正比于两个粒子各自的质量，反比于二者之间的距离的平方．

这就是著名的牛顿万有引力定律（实际上，牛顿从未把这条定律表示成普遍形式，而是在不同场合给出不同的表述，这些不同的表述结合成上面这段陈述）．他把物质的这种吸引力叫作引力，意指重量或重力．

万有引力定律显示了质量和重量的区别：物体的质量与它在空间中的位置无关；但倘若将物体放置在引力场中，它就感受由引力所引起的重量．理论上说，引力无处不在；但事实上，一个物体对另一个物体的引力作用当二者离得足够远时就减小为零．

太阳系里的哈雷彗星的轨道．



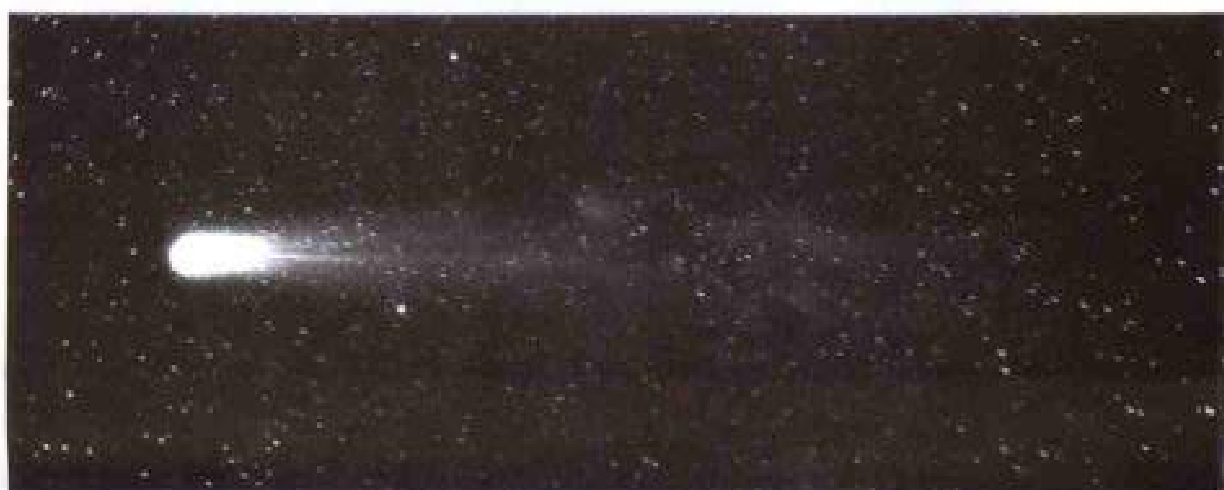
牛顿能证明，如果两个物体按平方反比定律相互吸引，它们就均以圆锥曲线作为其运动轨道；这两个物体的"引力中心"在每一条圆锥曲线的一个焦点上．如果物体的能量不很大，它们的轨道是椭圆．但自远方而来的彗星可能沿着双曲线轨道或抛物线轨道；就是说，它们或许露一次面，便继续行进、永不回归．另外一些有椭圆轨道的彗星，诸如哈雷彗星，会周期性地回归．

再假定两个物体中的一个有其大质量，而另一个的质量甚小，就如太阳和地球那样. 故而对于一切实际问题来说，大物体的位置与引力中心相重合；那么，开普勒三定律乃是引力定律的推理结果.

牛顿的自然哲学对于理解物理现象有很大作用. 由此表明，如何用数学推理方式从很少几条数学定律导出物理现象. 于是，毕达哥拉斯意欲用数学描述世界的那个古老的梦想开始成为现实. 莱布尼兹谈及牛顿："从世界开端到牛顿在世的时代，牛顿所用之数学占了一大半". 而拉格朗日则评论："牛顿是有世以来最伟大的天才，又是最幸运的人，而我们所能找到的只不过是世界一度所能形成的体系."

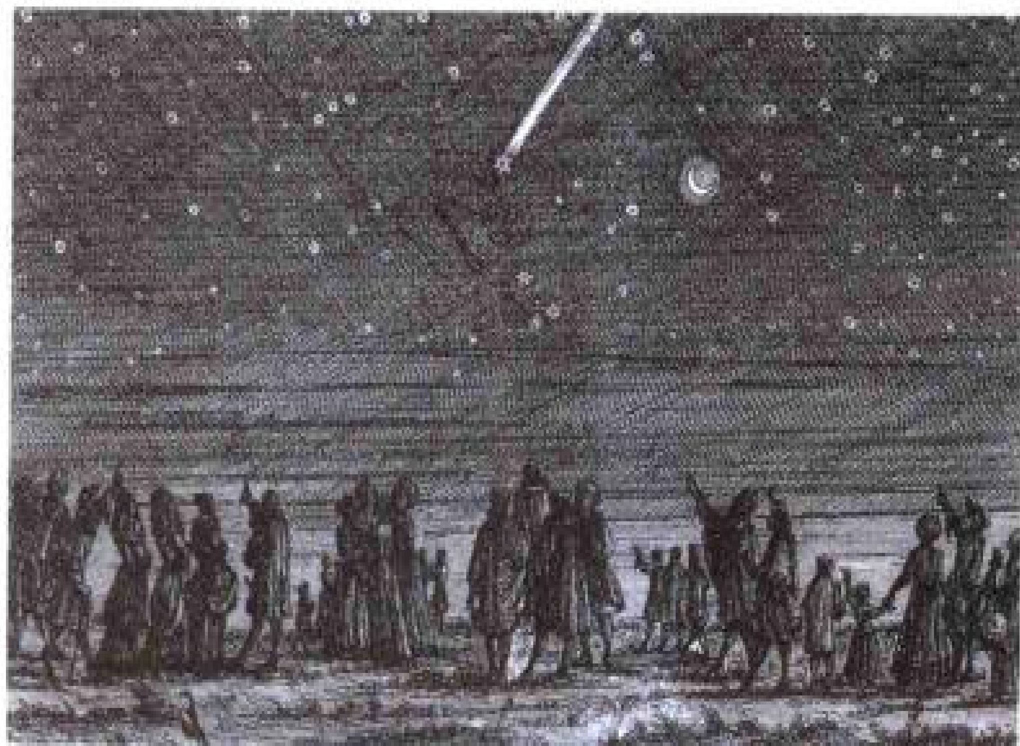
哈雷彗星. 1910年6月6日~7日，由加利福尼亚利克天文台摄像.





终于，因经验事实与牛顿力学的理论预言如此严密地相符，牛顿的理论被当作普适真理来接受；它将行星运动和地面下落石块的运动都同样解释得圆满．该理论将海洋潮汐理解成由太阳和月亮产生的引力现象；预言地球在两极处被压扁；其最佳成就之一，则是解释了（春、秋）分点［以及（夏、冬）至点］的进动现象．春分和秋分是一年中昼、夜同长的两日；夏至和冬至是日照最长和最短的两日．由其开始四季的这四日，相对于太阳年以每72年1度的速率延迟．希腊天文学家已经描述过这个现象，但一直没有人能给出解释．直至牛顿，才明白地球在赤道处凸出乃是一种不对称；太阳和月亮凭藉吸引作用，对其产生强烈的影响．这导致地球的轴线转动，勾划出一条圆锥曲线，恰如自旋的陀螺可能有一根运动着的轴线．地球的轴线大约每26 000年转过一圈；此转动导致分、至点的进动．

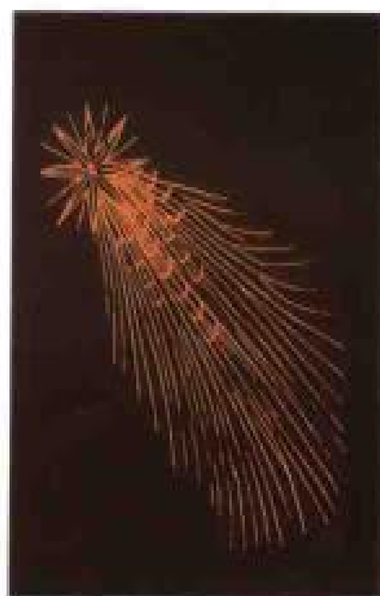
在古时候，彗星被看作非常事件的先兆，或者是预测有奇事发生，或者更常常是预感大祸来临：战争、饥荒、火灾、洪水和瘟疫，都是对人类的巨大磨难．此木刻画取自瓦格纳（J. G. Wagner）的《尘世氛围》，画出了德国奥格斯堡的市民们正在观望一颗彗星．自从牛顿理论得以解释彗星的运动以后，人们对于这些太空之信使的恐怖感消退了许多；尽管直至如今，当它们在空中露面时，人们依然激动异常．





布鲁克彗星（1911年10月21日）的彗头，由加利福尼亚的利克天文台摄像.

牛顿在其《原理》一书取得巨大成功之前，生活得安稳而宁静. 他于1642年圣诞节（按照我们的历法推算，那天可能是1643年1月4日，但当时格里高里历尚未引入英国）生于林肯郡的乌尔索普村，此乃在伽里略逝世一年之后. 据说为使他成为农场主的种种尝试都告失败，于是在1661年他进了剑桥大学三一学院. 他埋头于学习，平静地研究了四年. 有人议论牛顿在那段时间里是通过深入研究古希腊著作而获得大量几何学知识的；但此说看来并不可靠. D·T·怀特赛德——牛顿《数学论文集》的编辑者强调说，就他所知并无支持这种议论的资料：牛顿既未研究过阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线》，也未研究过阿基米德的任何著作；他是从笛卡儿那儿得到关于圆锥曲线的知识，乃是读了由弗兰斯·范斯库顿（Frans van Schooten）出版的笛卡儿几何学的拉丁文版（1649年和1659年）. 牛顿在读了德·拉·希尔（de la Hire）的《圆锥曲线》的第八卷（1685年）[1]以后将有



《纽伦堡市志》里所画的1493年彗星.

关圆锥曲线的各个结论作为《原理》第一编的最后一个附录添入该书中. 1665年牛顿在剑桥取得学士学位. 而在1665—1666年这两年间，瘟疫肆虐，牛顿就住在乌尔索普家中. 按照他自己的说明，他的一些大的科学发现，其大部分是在这段时间里作出的，然而这不合适的陈述或许使人们怀疑有加.

1669年，伊萨克·巴洛(Isaac Barrow，1630—1677年)辞去了剑桥大学数学教授的职位，将这一职位付予其学生牛顿. 于是，牛顿成了教授；他担任此职位直至1701年.《原理》一书出版以后，牛顿变得那么出名，以致他的精力被愈来愈分散，渐渐地脱离科学活动. 大约有两年时间，他作为伦敦的帕连姆特大学的代表；1695年又被委任为造币厂的监理，四年后，被提升为造币厂的主管. 1696年他迁回伦敦，重新成为帕连姆特大学的成员. 1703年，他被选为皇家学会主席；此职一直保持到1727年逝世为止.



彗星尾巴的指向总是背离太阳.[此图版取自《原理》(1687年)，与1680—1681年出现的哈雷彗星的姿态有所不同.]

动力学的变分原理

我们已经花费相当长的篇幅讨论动力学的发展情况，由此表明在其初始创建过程中并无变分原理在发挥作用. 但当牛顿力学在欧洲大陆刚被接受，最初的变分原理便被发现了. 在第1章，我们已回顾了18世纪初期，当时欧拉和莫佩蒂阐述了最小作用量原理. 我们意欲说明此原理颇为精确的形式；关于单个质点之运动的最简特例已被普遍接受.

设从时刻 t_1 起始到时刻 t_2 为止，有一质量为 m 的质点在诸如引力场那样的保守力场中运动. 在力场的每一点，给定其大

[1] 见费尔曼(E.A.Fellmann)："牛顿的《原理》"，载《德国数学学会会刊》77(1975年)第107—137页.

小和方向的力作用于场中的质点 m，根据牛顿第二定律，则有

$$力 = 质量 \times 加速度，$$

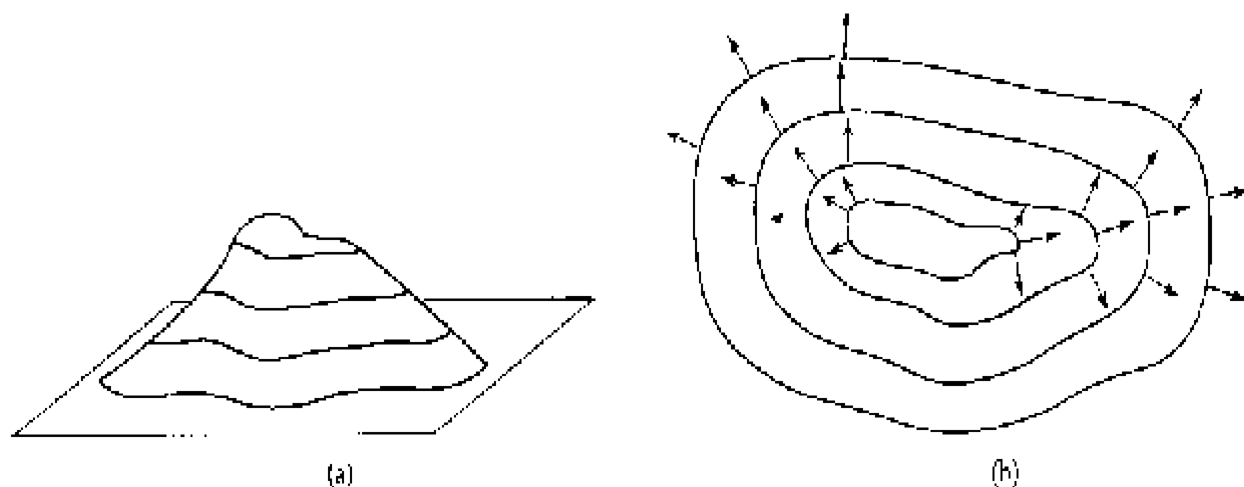
或

$$F = m a.$$

如果把一个力看作与某一点相接触的一个箭头，那么力场即为固定于空间(或空间的某一子区域)所有点的箭头系统. 倘若此力 F 的场具有势能 U，我们说，它就是保守力场. 对此有一条规则：空间一点 P 的势能数值为 $U(P)$，那么 U 在 P 点的"负梯度"便等于 P 点的力 F，其意如下所述.

假设函数 U 描绘了四维世界内三维空间之上的"地貌"图(形貌图)；当然，此地貌图不可能画出：下面的图只表示二维空间之上的能量形貌. 且设空间内一点 P 以及 P 点上方能量表面上的点 P'. 如果 P' 不是山区的稳定点，则可对应于三维空间的 P 点找到一个方向，以表明 P 点之上 P' 点处表面上升最陡的方向，反之，亦有函数 U 降落最剧的方向. 使一箭头附着于 P 点，指明这两个方向中的某一个，箭头长短等于 U 沿此方向的"变

(a)一座山的表面上超出山谷底面的等高线，及其(b)相应之投影线，各点的箭头标明山表面在该点(箭尾与其相接触)降落最剧的方向.



化率"．这样就定义了两个其尾端在 P 点的矢量．U 增大最剧的方向定义为 U 的"梯度(矢量)"，记以 grad U；而其指向相反的矢量定义为"负梯度"，这是与 grad U 反向的箭头，故记以 $-$ grad U.

如果 P^* 是稳定点，譬如说，是山顶点，那么 U 在 P 点有极大值，且既无 U 升高最剧的方向，也无 U 降落最剧的方向（表明人们在山顶上的感觉：地面水平，并无升降）．因此，在稳定点的 grad U 和 $-$ grad U 取作零.

于是，假定 F 是保守力场，其势能表示为

$$F = -\text{grad}\,U,$$

此式对于空间各点均成立.

设质点 m 以某一速度（其绝对值为 v）在空间运动．因为 v 可随时间而变，它必须被看作为时间 t 的函数．那么，可定义质点在每一瞬时的动能为

$$T = mv^2/2.$$

表达式

$$E = T + U$$

称为质点在每一瞬时的总能量.

凭藉一些微积分运算，可从公式 $F = ma$ 和 $F = -$ grad U 导出：总能量 E 是常量；换言之，质点在保守力场中以这样的方式运动：其总能量的数值 E 在各瞬时均相同（均为 E_0）．这就是能量守恒定律，它表示为

$$E = E_0.$$

这条定律解释了用于力场的术语"保守". 我们考察保守力场的两个典型例子. 第一个是地球表面之上的引力场, 对此人们考虑石块被抛出后的运动轨迹问题. 这里假定各点的引力(强度)相同, 并总是取垂直于地球表面的指向; 为简化起见, 且假设地球表面是平面. 此力场的势能U是超出地面之高度h的线性函数, 它随着高度的增大而增大. 这关系式表述为

$$U(P)=mgh+C.$$

其中, m为在引力场中运动的质点的质量; C为任意选定的规范常量; g是一个正的常量, 根据测量, 其值为9.81米/秒².

另一个例子是大质量M的引力场, 这大质量物体静止在一个固定点Q, 吸引着某一绕Q点运行的质点m. 此场在一点P的势能由表式

$$U(P)=-GmM/r+C$$

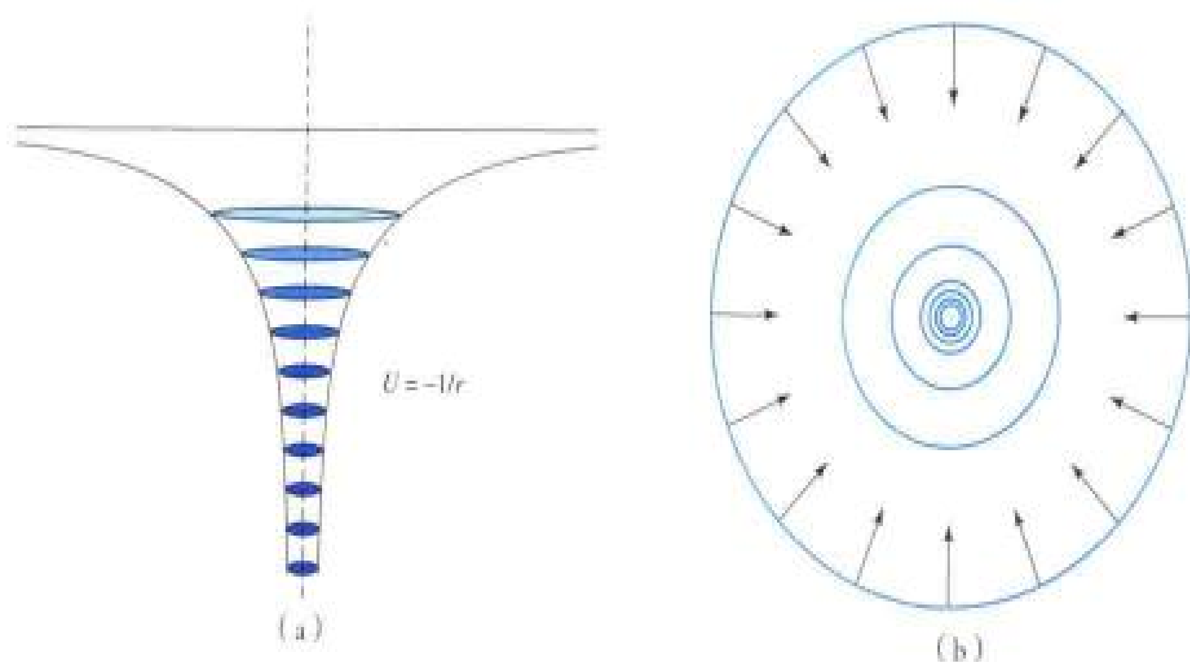
给定, 其中$r=\overline{PQ}$是P点与中心点Q的距离; G是牛顿引力常量, 它由实验以甚高精确度测定; 而C是一个可以任意选定的常量.

一质点在时刻t_1和t_2之间的运动过程中所完成的作用量A定义为积分

$$A=\int_{t_1}^{t_2}2T\mathrm{d}t\ .$$

(此式右边的记号$\int_{t_1}^{t_2}2T\mathrm{d}t$乃标记如第291页右边中图所示的——$t$轴与函数$2T(t)$的图线之间阴影区域的面积.)

假设质点m在保守力场作用下从P_1点运行到P_2点, 其实际运动与其他一切原则上可能发生但实际上并不发生的运动之间



(a)质点的牛顿势正比于函数$U=-1/r$，其图像是一条特定的双曲线绕一根垂直轴线旋转而成的曲面，此轴线乃双曲线的两条渐近线中的一条．一些其中心同轴的圆标示牛顿势的等高线．此图像宛若一个(无限长的)漏斗．愈靠近中心，漏斗陡得愈益厉害．故而，(b)等高线在平面上的等距投影线就愈来愈向中心收拢．

有些什么区别呢?

按照牛顿的理论，只要初始数据已知，实际运动乃由方程$F=ma$决定；还有另外的方式确定实际运动，但在概念上完全不同．

按照莫佩蒂的理论，质点m在力场$\mathbf{F}=-\mathrm{grad}U$作用下从$P_1$点到$P_2$点的实际运动，与其他一切运动的区别在于如下性质：实际运动的作用量取作稳定值．其实，这里我们已将莫佩蒂极小原理：

探求使A为极小的运动，

代之以弱一点的要求：

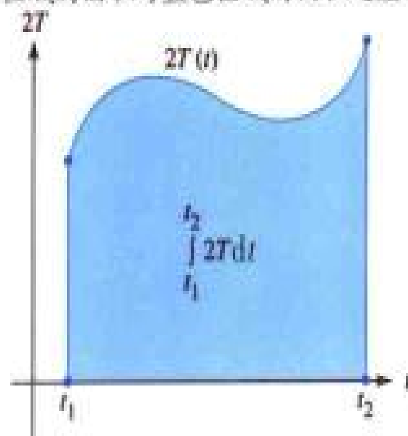
探求使A为稳定值的运动．

但是，这条原理尽管成立，也完全是无意义的，因为在A的表式中作用力总不出现. 正确的陈述或许为：并不需要在从P_1点到P_2点的一切运动中探求A的稳定值；在这一切运动中唯在任何时刻都有相同的不变的总能量E（譬如说$E=E_0$）的运动，才作为真实的运动.（但计算能量常量未必就知道真实运动；例如，此值可从初始数据或别的一组完备数据得出.）



如果函数$f(t)$既有正值、又有负值，则其在t_1和t_2之间的积分$\int_{t_2}^{t_1} f(t)\,dt$是一个"有向面积". t轴之上的面积计以正值，t轴之下的面积计以负值. 在本例中积分值即为灰色区域的面积与蓝色区域的面积之差.

更为复杂的是：通常，倘若预先指定初始时刻t_1和终止时刻t_2，并不可能凭借具有确定的总能量的一种运动使质点从一个给定点抵达另一给定点. 因此，在质点的从P_1点到P_2点、且有相同的总能量E、相同的初始时刻和终止时刻的一切可能运动中，要求其作用量取值为极小，乃是没有意义的，因为不可能有这样的运动. 摆脱此困境的方法是：在具有确定的总能量、从P_1至P_2的一切可能的（或虚拟的）运动中使其作用量为极小，但起步的时刻和抵达的时刻都是不固定的.

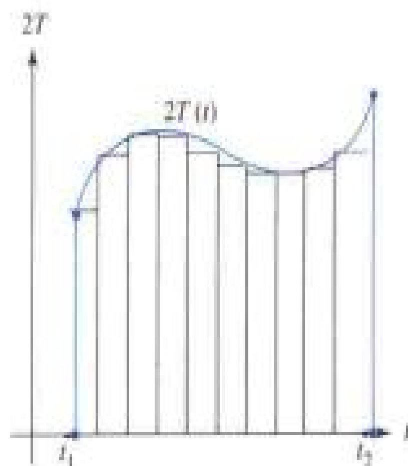


在此理论构型中，作用量原理原来是正确的，但往往不易掌握. 所以，下文将说明由拉格朗日导出的另一种型式. 首先定义$L=T-U$，即所谓拉格朗日密度或作用量密度，此乃动能与势能之差. 从$E=T+U$便得出

$$2T=L+E,$$

因总能量不变，为常量E_0，故

$$2T=L+E_0.$$



积分代表上图中阴影区域的面积. 积分号$\int$由莱布尼兹引入，仿效字母S（因取和sum）. 此记号标明：上图中阴影区域的面积可以从将下图中那些矩形的面积求和近似地得出，只要矩形的宽度趋近于零即可.

再来看在两个t值t_1和t_2之间，两个函数$2T$和$L+E_0$的图线下面的面积. 这两条图线是重合的，则有

$$\int_{t_1}^{t_2} 2T = \int_{t_1}^{t_2} (L - E_0)dt.$$

因此，

$$\int_{t_1}^{t_2} 2T = \int_{t_1}^{t_2} Ldt + \int_{t_1}^{t_2} E_0 dt.$$

左边的积分就是作用量积分 A，而积分 $\int_{t_1}^{t_2} E_0 dt$ 乃 t 轴之上高为 E_0 的矩形之面积；矩形的另一边即为 t 轴上 t_1 和 t_2 之间的一段。所以，其积分值为 $E_0(t_2 - t_1)$。于是得出

$$\int_{t_1}^{t_2} Ldt = A + E_0(t_1 - t_2).$$

由此式出发，我们正确地推测：对于从 P_1 到 P_2 的真实运动，也可将积分 $\int_{t_1}^{t_2} Ldt$ 用于阐明其变分原理。这新的变分原理叙述为：

如果真实运动起始于 t_1 时刻和 P_1 点、终止于 t_2 时刻和 P_2 点，其积分 $\int_{t_1}^{t_2} Ldt$ 取值稳定（有时甚至为极小值），此乃就与真实运动在相同的始、终时刻，并起始于 P_1 点、终止于 P_2 点的一切运动相比较而言。

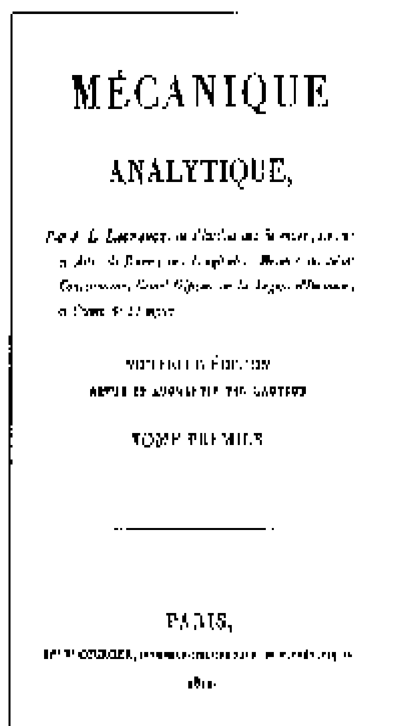
这一条变分原理的新特征在于：与前述作用量原理不同，无需辅助条件 $E = E_0$，也无需对变分加以限制！换言之，对于虚拟运动并不限制其能量 E 恒定，并可固定 t_1 和 t_2。这样，掌握积分 $\int Ldt$ 就比掌握 $\int 2Tdt$ 更容易得多。事实上，变分原理

探求对于 $\int_{t_1}^{t_2} Ldt$ 稳定的运动

是作用量原理的特殊型式，可把作用量原理推广到更困难的场合和其他物理问题[1]。

[1] 海因里希·赫兹（Heinrich Hertz）认为：变分原理或许仅仅对于颇局限的一类力学问题才成立；但通常地说，至1896年，奥托·赫尔德（Otto Hölder）证明，此原理是普遍有效的

在德国和法国，此原理称为哈密顿原理；而在英国，则谓之稳定（或最小）作用量原理．目前这两个名称都使用．奇怪的是，在本章开头提及的拉格朗日论文里根本就没有把这条原理表述清楚，但拉格朗日对达朗伯原理的重新阐述与“使作用量$\int Ldt$稳定”的原理相一致．上文所述拉格朗日将其分析力学立足于作用量原理乃是恰当的．作用量原理的这种型式被伟大的爱尔兰数学家威廉·罗恩·哈密顿(1805—1865年)阐解清晰．他首先把一条相关的原理用于几何光学(亦即用于射线的光学)；后来他发现：一些数学问题可用类似的方式予以分析．质点力学问题与几何光学问题之间的必然对应正就是由哈密顿所最早认清的，虽然他的观念之渊源，可在费马、牛顿和约翰·伯努利的著作中找到．乍一看，哈密顿的这种洞察力无非是一种对形式上类比的好奇心和一种有效的技巧罢了；然而在量子力学和相对论的理论领域中，由其而导致对实物的波动性、光的粒子性的理解，以及最终导致物质与能量的相当性．


MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

PARIS,

拉格朗日的《分析力学》第一卷［巴黎，1811年（第二版）］之卷首页．

关于相对论

在牛顿时代，没有人会接受支撑其理论的哲学观念．我们已经提及惠更斯的怀疑态度．约翰·伯努利还保留着笛卡儿的观念，尽管他曾认真地读过牛顿的《原理》．他为牛顿指出其几个错误，牛顿在第二版（1713年）中已予纠正．（《原理》的第三版和最后一版于牛顿逝世一年前的1726年出版．）伯努利觉得，难以相信其作用超越甚至几亿英里距离的真空空间的力概念．他把力看作自以反抗心理上不习惯于接受物理学中任何原理（无可争辩和显而易见者除外）的那一种概念；莱布尼兹把万有引力看作一种非物质的、难于解释的动力，哲学上并无相应概念．

但甚至牛顿，对于力是如何作用的问题也颇感困惑，除了有如下陈述外，他不能给出其他解释；他说：“我还不能从现象



仙女座星系，由利克天文台摄像（Crossley 反射望远镜）

中得出万有引力之性质的起因，我还不能设想一些假定；凡不能从现象得出的命题必称之为假说."[3] 再则，在致里查德·本特利(Richard Bentley)的信中他写道：

> 万有引力是物质所固有的、内在的和本质的属性，所以，一个物体可以对一段距离之外的另一个物体产生作用，通过这段距离，力作用从一个物体传递到另一个物体；在我看来，这是极大的荒谬，以致我相信没有人有能力思考其哲学意义，甚至会拘泥于此.

牛顿杜撰术语"超距作用"（意指"其作用超越距离的力"，

[3] 这是牛顿在《原理》第二版末尾（第 484 页）中的著名论述，第一版中并不见. 这一段的拉丁文原文是这样的："Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phaenomenis nondum potui deducere, et Hypotheses non fingo.Quicquid enim ex Phaenomis non deducitur. *Hypothesis* vocanda est; et Hypotheses seu Metaphysicae,seu Physicae,seu Qualitatum occultarum,seu Mechanicae,in *Philosophia Experimenta —li* locum non habent…Et satis est quod Gravitas revera existat,…"



红光中的玫瑰星云，由利克天文台的20英寸天体摄影仪摄像.

并必须与作用量原理中出现的"作用"不相混淆）以描述引力越过甚大距离的神秘效应. 对此效应，如今与在牛顿时代同样地难于理解. 下文将谈到，爱因斯坦以比较几何化的模式取代这个超距作用概念.

在牛顿动力学中还有更大的困难. 这涉及牛顿的绝对空间和绝对时间的概念. 那么，下面来考察此概念.

倘若问："何谓空间？怎样才能找到我们身在空间何处"?且看两位最著名的天文学家是如何确定空间位置的?

伽利略测量相对于地球表面的空间各处的位置，人们为此还做了许多实验. 这样的测量方式并不正确，但由此而产生的

误差往往可予忽略，而开普勒使用天文坐标系；其中心定于我们太阳系的引力中心，坐标轴由空中恒星定向．这就是物理学中的标准坐标系，一直使用至今．

但伽利略和开普勒的这两种解决方式并没有告诉人们为什么一个坐标系比另一个坐标系优越．可以回答说：无论选择哪一个坐标系，其实在理论上都无关紧要，因为任何哪一个参考系都与其他任意参考系一样好．也可以回答说：无论取这种解决方式，还是取那种解决方式，其实都是一样的；犹如无论取码、还是取米，无论取磅、还是取千克，无论取夸脱、还是取公升，作为单位去量度长度，重量，体积，都没关系．只是实际的需求引起特定的选择：木匠不用英里或光年、而用英尺或米作为单位量度其产品的长度，而汽车司机不乐意用英寸或纳厘米作为单位标示从凤凰城到上斯城的距离．

可是，如此回答过于简化，其理由如下．假如牛顿定律在某一参考系里成立，并因某种理由我们决定改变坐标系．譬如说假设我们在火车车厢里做实验；可以发现，对此实际目的，把车厢交于某一角隅的任意三边选作坐标系（然后测量相对于该角隅及其三边的位置）比采用固定于英国格林威治的、地理学家的参考系更为方便．

我们能否确保在这车厢坐标系里牛顿定律以与在标准坐标系里同样的形式得以成立？如果火车以均匀速度笔直行驶，回答是肯定的；如果火车加速地行驶，回答是否定的．在后一种场合，我们以及我们的实验都受到外加力的影响．（准确地说，倘若火车减速，就数学意义而言，它也是作加速运动，只是其加速度以负数计．再则，倘若火车以均匀速率沿曲线行驶，它亦是作加速运动．速度每每改变，或者是其绝对值改变，或者是其方向改变，即意味着有加速度．）

由这些讨论可得出什么结论？看来动力学定律在不同的参考系里并不相同，那么牛顿定律只能在很特殊的坐标系里才成立：任意两个这样的坐标系必须沿着同样的不变方向、且相互作匀速运动．何者为“优越坐标系”？开普勒的坐标系是这样一种至多仅有很小偏差的坐标系吗？

这使我们明白：力学概念需要一个诸如“绝对空间”的框架；人们将其想像成一个伸展至无限远的“箱盒子”，作为静止的绝对坐标系．牛顿定律在此坐标系以及所有相对于它作匀速运动（速率或方向均不变）的所有坐标系都成立．这些坐标系便称为惯性系．

牛顿动力学原有的另一个概念是绝对时间．这概念意指一旦选定了初始时刻、亦即当今时刻，则就必然假定时间从无限过去流向无限将来．并且，牛顿假定：无论我们自己的位置如何，我们至少在原则上总可说出，任意其他物体在任意时刻位于空间何处．换而言之，两个事件是否同时发生总是清楚的．爱因斯坦于1905年在他的狭义相对论中首先推翻了牛顿的这个假定．根据实验资料，他势必不得不得出结论：两个事件在一个参考系里同时发生，但在另一个参考系里可能不同时发生，纵然两个参考系相互作匀速运动．实验事实促使爱因斯坦作出这个正确结论．这些事实暗示速度相加不像牛顿动力学中所要求那样的矢量（即“箭头”）相加方式．

狭义相对论的一个主要观点是空间和时间不可分离．的确，空间和时间必须看作不可分离的、结合在一起的东西．按照爱

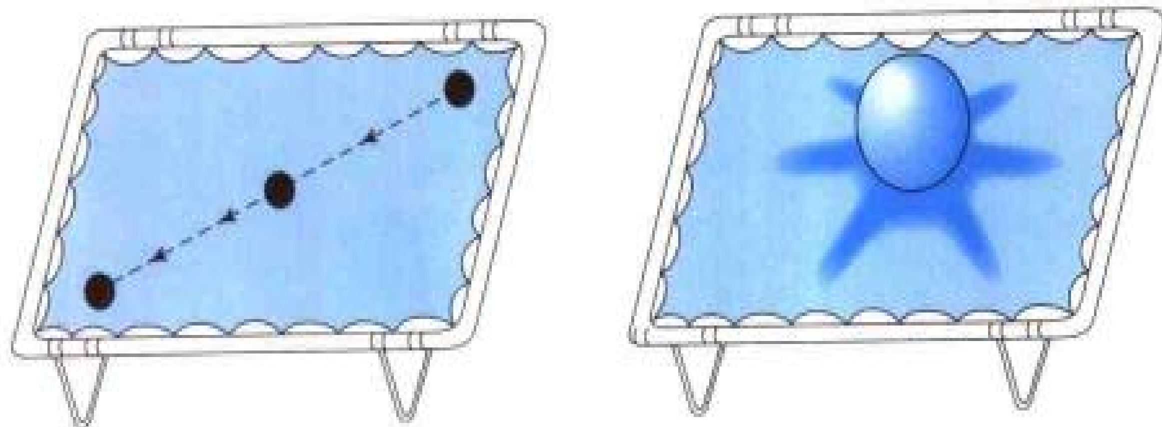
[1]莱布尼兹拒绝绝对空间概念；他明白，若撇开对于物质体的关系不论，在哲学上就不需任何空间概念．莱布尼兹与塞缪尔·克拉克(Samuel Clark)——牛顿哲学的支持者，就此问题在1715—1716年期间，通过一系列著名的信函展开辩论．主教·伯克利(Bishop Berkley)攻击牛顿，后来欧拉和康德为绝对空间概念辩护．

因斯坦的看法，存在无限多彼此作相对匀速运动的惯性系，物理定律在其中均成立. 然而，倘若从一个参考系变换到另一个参考系，则不能保持时间和几何长度不变，即使两个坐标系相互作匀速运动. 由此而得出下述奇妙的意蕴.

假设铁轨静止在某一惯性系里，而一列火车起先并不运动. 观察者测量列车的长度为 L 米. 列车起动、加速到速率 v. 观察者看到列车行驶着，对它再次测量；他测定列车的长度为 $L\sqrt{1-v^2/c^2}$ 米，其中 c 是光速. 那就是说，当列车的速度 v 趋近于 c，其长度在车外观察者看来竟缩短为零！

爱因斯坦对于这方面的研究未曾中止. 他寻觅物理学的表述体系，对于惯性系都没有区别；而且，基本定律在每个空 – 时坐标系里都以同样的形式成立. 因此，爱因斯坦试图找到适合于表示他的观念的数学形式. 他在其朋友马塞尔 · 格罗斯曼(Marcel Grossmann)的帮助下，不无惊奇地认清：这样一种数学形式已由高斯、黎曼以及后来的意大利、德国和法国的两代几何学家展现出来. 于是，爱因斯坦发明了四维空 – 时世界概念，这世界并非“平直”，如欧几里得公理所定义的二维空间和三维空间那样，而是弯曲的. 这世界的弯曲乃由物质和能量生成. 在这

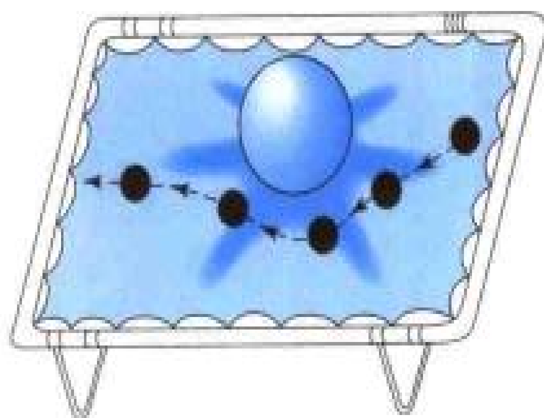
蹦床上的钢球.



四维世界，凡巨量物质近处，其曲率甚大，而远离物质处，其曲率近乎为零. 曲率为一方，物质和能量为另一方，二者之间的精确关系，正是爱因斯坦场方程的涵容所在. 显然，如大卫·希耳伯特所发现的，此场方程源自变分原理.

在爱因斯坦理论中，通过大距离作用的力概念代之以空-时世界的曲率. 为了阐明爱因斯坦的设想，我们且提供一个过于简化的模型，以显示他的基本观念. 用一个曲面代表空间，把它想像成原先是一只平蹦床(真空状态)，但某一点处受到一个大钢球(太阳)的强烈压迫. 此蹦床上还有一个滚动着的小钢球即为我们这个行星——地球.

如果使小钢球在平蹦床上穿越滚动，它乃沿着一条直线路径行进. 但倘若将大钢球放在床的中央，大钢球便使蹦床弯曲，甚至离球"甚远"处也弯了. 然后推一下小钢球，它就不再沿直线路径，而是沿弯曲路径行进了. 大球因使其周围空间弯曲而对小球运动轨迹产生影响. 只要适当地推一下小球，它甚至一时间绕着大球转动. 用蹦床这模型解释了大物体通过弯曲了的空间而影响其大距离外小物体的运动.





阿尔伯特·爱因斯坦(1879—1955年)在佩顿办公室的书桌旁，伯恩，1905年.

再则，在爱因斯坦的弯曲世界里，光亦沿着短程线传播．他预言，光线通过大曲率区域（诸如太阳附近）时，其路径必定偏转．通常不可能观察到光线靠近十分耀目的太阳时的路径，但日食提供了这种测量的难得机会．两支英国考察队［分别由爱丁顿（Eddington）和科廷汉（Cottingham）带领］分别到新几内亚和巴西北部的索布拉，利用1919年5月29日发生的日食，观察远星发出的光线通过太阳近处时是否偏转．两支考察队都证实了爱因斯坦的预言．爱丁顿后来写道：

> 哎！撇开验证预言的这一测量方法不论，有一点至少可予肯定：光线有重量．还有一点亦可肯定、并无需争辩：光线若靠近太阳，绝非直线行进！

我们想引用马克斯·普朗克(Max Planck)于1922年6月29日，即"莱布尼兹纪念日"在柏林科学院所作的演讲，以结束本书的阐述．他回忆起曾听到关于莱布尼兹品格的传闻，便着力说明这位伟大的科学家和哲学家的一项很特殊的成果：

> ……神正论……因如下陈述而达到其巅峰：在我们的世界中，无论是在大领域还是小领域、自然界还是精神生活里所出现的任何事物，都是由神的明智一劳永逸地调整定当，并达成这样的形式——使我们的世界成为一切可能世界中最好的一个．

> 看一看如今的困惑，又看到不以物质利益为直接目标的多方面努力惨遭失败，并考虑到想像人类普遍的和谐如今似乎愈加背离原有的认识这个无可辩驳的事实，那么即

使到现在，莱布尼兹是否证实了上面的陈述？无疑，我们必须对这个问题作出明确的回答，纵然我们并不知道莱布尼兹从未中止其辛勤操劳，直到晚年还遭遇种种厄运和挫折；我们若设想，在他一生最不顺心的岁月里，是神正论确实给予他以力量和安慰，则如此设想不会有错．这又是古老真理的一个令人感动的事例：该事例乃指：最深奥、最神圣的原理坚实地扎根于人们的心灵深处，而与其对于外部世界的经验无关．



馬克斯·普朗克（1858—1947年）．

现代科学，尤其是在因果性观念发展的影响下，已经远离莱布尼兹的目的论观点．科学已经不再假设有特殊的、先期的原因；原则上，它把自然界和精神世界里的每个事件无论如何都看作可还原成前述的情况一般．但我们还注意到一个事实：特别是在最精确的学科中，至少在这个意义上颇使人惊奇．目今的物理学，就其理论上的调排而言，完全由一个空间－时间微分方程的体系所支配，方程表明自然界里的每个过程都由其时空邻域里出现的一个个事件所全然确定．在这整个丰富多采的微分方程体系中，各方程虽然细节上不同，分别代表力学的、电学的、磁学的和热学的过程，但目今都从同一条公理——最小作用量原理得出．简而言之，在一切可能发生的过程中，实际发生的只是所需消耗的作用量为极小的过程．我们可知，所需跨越的小小一步乃是出于对最小作用量的偏爱而去裁定神化的起因，以致发现莱布尼兹的目的论对于调整宇宙的作用．我们明白，观点上的不同只不过是解释上的不同，决非本质上有所区别，因为前者把视野局限得甚小，后者拥有大范围的时空．在这个时候，每个人都必须判定自己持怎样的观念才是带根本性意义的，还必须询问怎样的研究最终会取得更大的成功．

> 在当代物理学中，最小作用量原理所起的作用相对较小；它并不适合于当代理论框架。诚然，这条原理被公认是一种正确的陈述；但它通常并不充当理论的基础，而当作一条定理，但多仅是可以省略的附属物罢了。因为当代理论物理对于无限小局部效应的这条原理来说是十分简洁的，但推广到其大时空区域就似乎带有分析方法上不必要的和不经济的复杂性。所以，物理学视最小作用量原理为形式上的、偶然形成的稀奇原理，而并不将其当作物理知识的支柱看待。

> 因此，甚至令人更加惊奇的是：这条由莱布尼兹[1]初提、假借数学当作为力学定理[2]、由赫尔曼·冯·亥姆霍兹(Hermann von Helmholtz)所确定的原理竟在他那个时代对于整个物理学各领域均为有效，并不带任何限制性条件。目前，大卫·希尔伯特凭借此定理的普遍型式，已确立其在爱因斯坦的广义相对论中的地位。但情况似甚复杂；这样一条简单原理竟占据优势地位，想来不太可能只是偶然的事情吧。如果不能解释被广泛接受的、简单的普遍关系，则便总是研究成果不完备的一个确定标志。只要对于一切被断定是成立的定律，人们理解了其中所有的含义和关系，并将其归入总体理论结构，则人们所希望的就满足了。

在后来一个"莱布尼兹纪念日"（1935年6月27日），普朗克再一次论述了神正论的主要命题——在一切可能的世界中，我们这个世界是最好的：

> 如今似乎是愈来愈难找到对于人类发展的合适理由，

---

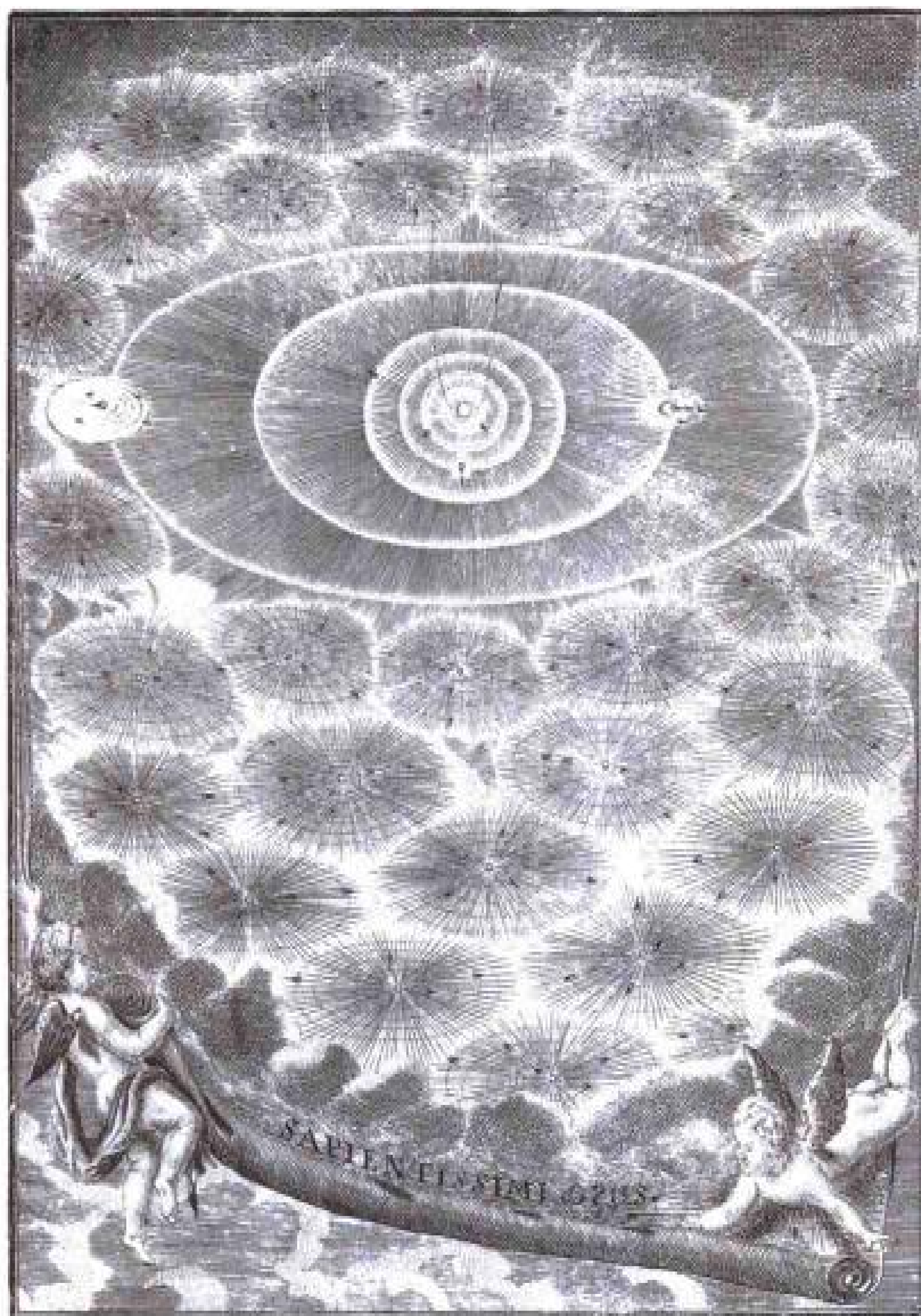
[1] 普朗克认为莱布尼兹是最小作用量原理的发现者。

[2] 普朗克的这个说法不完全正确，可参见第1章中所述。

这个命题因其大胆冒险而看来像是荒谬的东西，在对着当今的时世——世界大战的恐怖、人们的相互猜忌、日益扩充的武力装备，莱布尼兹还会保留这个命题吗？我们或许必须确认此问题，纵然我们可能不知道，莱布尼兹或者并不也曾影响其生命的头两年的那历时三十年的战争所带来的对生灵的残酷摧残，或者也许不因他的祖国接连不断地蒙受莫大屈辱而抛弃他的哲学。就是说，神正论哲学既不能由历史证实，也不能由历史证伪，这不是经验的结果，而是莱布尼兹对世界的描述和审视世界的出发点。按照他的哲学观点，世界中任何明显的矛盾、灾难和不公正现象都可归因于：人类有限的智力不能认清任何单个事件与宇宙总体设计的完整关系，正如局部的损失能使整体增益一样，局部区域的灾祸都有助于改善总体，并使其圆满。

附言：

普朗克的长子卡尔（Karl）在1916年被害于凡尔登；两个女儿都在生养第一个孩子时难产而死；幼子埃尔温（Erwin）因卷入1944年6月20日的冯·施陶芬贝格（von Stauffenberg）谋杀案而被希特勒（Hitler）的刑事审判官弗赖斯勒（Freisler）判处死刑，于1945年执刑。其后不久，普朗克失去其个人拥有的一切，差不多87岁时，他自知身处奔赴西方的避难人流中，就像他前前后后成千上万的受难者一样。



宇宙里的太阳系．由贝罗（Berot）按弗里施（F.K.Frisch）的画制版．载欧拉的《宇宙中行星的运动理论》（柏林，1744年）．

参考文献、注释和进一步读物

序文

恩斯特·黑克尔（1834—1912年），在1865—1909年期间，乃是德国耶拿的动物学教授。他是德国最早的达尔文主义鼓吹者之一。他参与了遍及世界各地的持久性科学考察，系统地研究并描述了原始海洋区系动物的分类。他的一些著作因例证出色而著名，堪为藏书家所收藏之精品。与本书有关的几本列举如下：

Reports of the Scientific Results of H. M. S. Challenger (London:1881 1889). Haeckel's contribution to the *Challenger Reports* was reprinted in 1966 (New York: Johnson Reprint Corp.).

Kunstformen der Natur (Leipzig: 1899—1904).

Das Protistenreich: Eine populäre Übersicht über das Formengebiet der niedersten Lebewesen (Leipzig: 1878; Paris: 1880).

Die Radiolarien: Eine Monographie (Berlin: part 1: 1862; parts 2 through 4: 1887—1888.

下面几本是对于自然界中形态和图像的近乎现代方式的阐述：

D'Arcy W. Thompson, *On Growth and Form* (Cambridge University Press, 1917; abridged edition by J. T. Bonner, 1961).

Peter S. Stevens, *Patterns in Nature* (Little, Brown, 1974).

Wolf Strache, *Forms and Patterns in Nature*. 2d ed. Pantheon, 1973).

Stanislaw Ulam, "Patterns of Growth of Figures: Mathematical Aspects," in Gyorgy Kepes. ed.. *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm* (Braziller, 1966).

Frei Otto and collaborators: *Natürliche Konstruktionen* (Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt. 1982).

第1章

莫佩蒂的生平和工作以及他在科学史上的地位已由皮埃尔·布鲁内特（Pierre Brunet）在两篇专论中作过描述：

Maupertuis: Étude Biographique (Paris: Blanchard, 1929).

Maupertuis: L'oeuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du XVIIIe siècle (Paris: Blanchard. 1929)

另有一些次要专论列出了莫佩蒂的著作和其他作者论及莫佩蒂之贡献的著作。此外，我们可提及布鲁内特的论著：

Étude historique sur la principe de la moindre action. Paris, 1938.

莱昂纳德·欧拉选集（*Opera Omnia*第1～4卷）为论述17～18世纪的数学史和物理学史提供了丰富的论据。虽然他的七十多卷著作全集已经问世，但编辑工作还在进行之中。许多一流数学家为选集添加注释和历史性备考。

关于莱布尼兹和伏尔泰的第二次和第三次演讲是那么冗长和易于看到，故而我们在这里就一点不予说明。

牛顿选集已于20世纪出版，见《伊萨克·牛顿的数学论文集》［*The Mathematical Papers of Isaac Newton*, D. T. Whiteside, ed.（Cambridge: Cambridge University Press, 1967—1976）］.

《自然哲学的数学原理》（*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*）的第一版于1687年问世，第二版于1713年出版，第

三版于 1725 — 1726 年出版。后来的各版都在牛顿逝世之后出版。F·卡约里（F. Cajori）翻译的英文版《自然哲学的数学原理以及宇宙体系》（*Mathematical Principles of Natural Philosophy and the System of the World*）由加利福尼亚大学出版社出版（伯克利，1934 年）。伊萨克·牛顿的《原理》之第三版的最后一次印行本（1726 年）带有不同的注释，采取二卷本的形式，由科伊里（A. Koyré）和I·B·科恩（I. B Cohen）于牛津大学出版社出版。《原理》之入门，另由科恩于同一出版社出版。《原理》的带有莱布尼兹的注释之抄件的费尔曼版（此《原理》副本保存在 Bodmeriana 图书馆）出版时乃取如下的书名 G. W. Leibniz *Marginalia in Newtoni Principia Matematica.* Editio prima ab E. A. Fellmann;（in the series L'Histoire des Sciences. Textes et Etudes. Paris. Librairie Philosophique J. Vrin, 1973）。牛顿的典型传记是戴维·布鲁斯特（David Brewster）的《伊萨克·牛顿的生平》（伦敦，1881 年），其增补第二版则为《关于伊萨克·牛顿之生平、著作和发现的论文集》（爱丁堡，1886 年）。牛顿的进一步传记的作者及出版年份为：F. Rosenberger（Leipzig, 1895），A. de Morgan（Chicago and London: 1914），L. E. Moore, *Isaac Newton: A Biography*（1934; available in a Dover reprint），W. Stuckely（1936），and R. W. Westfall: *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*（Cambridge University Press, 1980）.

关于变分法的历史，见

Leonhard Euler, *Opera Omnia*, ser. I, vol.24.

Herman H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the Seventeenth through the Nineteenth Centuries* (Springer Verlag, 1980), which contains a selected bibliography on the history of the calculus of variations.

17 世纪数学科学的最重要的来源是：

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, which was edited by the academies of Göttingen, Leipzig, Munich, and Vienna, twenty-four volumes（Teubner, 1898 — 1934）.

除这得有趣，平易的两本更早期著作是 I. Todhunter, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*（London: Macmillan, 1861）, and R. Woodhouse, *A Treatise on Isoperimetrical Problems, and the Calculus of Variations*（Cambridge, England: Deighton, 1810）; both of these have been reprinted by Chelsea Publications, New York.

第 2 章

不管对于数学的发展历史研究得如何广泛，我们对于数学科学的认知还很不完全。作为对于历史性研究的评判之一例，我们推荐：

Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*（Princeton University Press, 1956）.

作为对于古希腊数学的介绍，我们提及如下著作：

B. L. van der Waerden, *Science Awakening*（P. Noordhoff, 1954）.

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*（Oxford University Press, 1972）.

Morris Kline, *Mathematics in the Modern World: Readings from Scientific American*（W. H. Freeman and Company, 1968）.

如下著作乃是学者式阐述：

Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. I（Leipzig: Teubner, 1894）.

Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics*（Oxford University Press, 1921）.

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*（Copenhagen: 1896）.

用英语说明欧几里得和阿基米德，见下述著作：

Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*（Cambridge: 1926）.

Thomas L. Heath, *The Works of Archimedes with a Supplement: The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg*

（Cambridge: 1897, 1912）.

这两本翻译均由多弗（Dover）出版社（纽约）重印．对于阿基米德之生平、他的手稿和印刷版本之来历、阿基米德的成就之渊源以及他的著作之新的英译本均由 E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*（Copenhagen: Ejnar Munksgaard, 1956）提供．从中读者可找到关于保卫叙拉古港和火镜的描述．阿瑟·贝里（Arthur Berry）的著作《天文学简史》［*A Short History of Astronomy*（London: John Murray, 1898）］对于天文学从开端到1900年的发展历史作了十分清晰的说明．这本书包含一份精选的天文学文献目录，截止于爱因斯坦相对论问世之前．另一本著作是 R. Wolf, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur*, two volumes（Zurich: 1890—1893; reprint Hildesheim, 1973）．关于等周问题的历史，我们提及 Helmuth Gericke, "Zur Geschichte des Isoperimetrischen Problems," *Mathematische Semesterberichte* 29（1982）:160—187.

第3章

对于赫伦的光线反射原理、施瓦茨的三角形问题、斯坦纳问题以及变分法的相关课题，在下列专题论文中都有分析：

Hugo Steinhaus, *Mathematical Snapshots*（Oxford University Press, 1950）.

Hans Rademacher and Otto Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*（Berlin: Springer, 1933）.

Richard Courant and Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*（Interscience, 1941; and more recent editions）.

D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*（Berlin: Springer, 1932）.

第一本是关于数学问题的有趣而易于理解的导引性书．我们知道的最好的数学导引性书乃由库朗和罗宾斯所著．但读那本书必须了解一些基本的数学知识．上列最后一本书由希尔伯特在哥丁根

大学于1920—1921年冬季学期所讲授的一门著名课程扩展而成；该书是最优雅的数学书之一，但亦如读库朗和罗宾斯的书一样，需要很好了解数学基础知识.

关于求解挂谷问题，参见 A. S. Besicovitch，"On Kakeya's Problem and a Similar One," *Mathematische Zeitschrift* 27 (1927): 312—320.

对17世纪和18世纪的数学发展情况作多方面描述的书有：

Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, four volumes (Leipzig: Teubner, 1880—1898).

其中，英文读物包括：

F. Cajori, *A History of Mathematics* (New York: 1984; plus various past editions).

D. E. Smith, *A History of Mathematics*, two volumes (Boston: 1923—1925; Dover reprint, 1958).

E. T. Bell, *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill, 1945).

W. W. R. Ball, *A Short Account of the History of Mathematics* (New York: Dover, 1960).

C. B. Boyer, *A History of Mathematics* (New York: Wiley, 1968).

E. E. Kramer, *The Nature and Growth of Modern Mathematics* (Princeton University Press, 1981).

此外，可提一下

Leonhard Euler. 1707—1783: *Beiträge zu Leben und Werk*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt (Basel: Birkhauser, 1983).

这一本纪念性书包含论及欧拉的文献的完全目录.

关于微积分——约翰·伯努利向洛必达侯爵介绍，我们提及 *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. I (Basel: Birkhäuser Verlag, 1955) 123—157.

第4章

Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* （Prague: 1883; and many later editions）是最有影响的力学史书之一．马赫著作的许多方面受到严厉批判，但对于谨慎的读者来说，这本书依然十分有益．人们必须读此书，并结合阅读：Clifford Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*（Springer-Verlag, 1968）.

关于力学原理的来历的著作有：

István Szabó, *Geschichte der mechanischen Prinzipien*（Basel and Stuttgart: Birkhauser Verlag, 1977）.

René Dugas, *Histoire de la mécanique* （Neuchatel: 1950）.

R. Taton, ed., *Histoire générale de la science*, four volumes（Paris: 1957）.

最后一篇专题论文包含一份很好的文献目录.

毛细作用的数学理论由托马斯·杨于1805年（*Essay on the cohesion of fluids*. London Philosophical Transactions of the Royal Society）以及皮埃尔·西蒙·拉普拉斯于1806年（Supplément au livre dixième de la mécanique céleste; see also Oeuvres 4, Paris: 1845）提出．拉普拉斯是他那个时代的一位伟大的科学家．他的 *Traité de la mécanique céleste* 是天体力学的基础.

关于毛细作用的数学理论在20世纪的发展情况，参见Robert Finn, *Equilibrium Capillary Surfaces*（Springer Verlag, 1986）；对该理论领域的通俗介绍，则参见 the classic by C. V. Boys, *Soap Bubbles, Their Colours and the Forces Which Mold Them* （1911; Dover reprint, 1959）.

第5章

不可能充分评价对极小曲面理论作出过贡献的许多数学家，因为我们缺少篇幅；而只是提及对这个理论领域进行评介的一些专题论文．极小曲面理论始于拉格朗日论述这个课题的第一篇论文（1760年）；在演讲 Johannes C. C. Nitsche, *Vorlesungen*

über Minimalflächen (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975) 和论文 U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, and O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I & II* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1992, two volumes) 里都描述了这个理论. 早一些的和不完备的综述有下面几篇:

T. Radó, "On the Problem of Plateau," in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (Berlin: Springer-Verlag, 1933).

R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces* (New York: Interscience, 1950).

R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces* (New York: Van Nostrand, 1969).

在极小曲面理论中如何使用几何测量理论的思想在 F. Almgren, *Plateau's Problem: An Invitation to Varifold Geometry* (New York: Benjamin, 1966) 和 F. Morgan, *Geometric Measure Theory —A Beginner's Guide* (Boston: Academic Press, 1988) 里能够找到. 论述几何测量理论的重要论文有: H. Federer, *Geometric Measure Theory* (New York: Springer-Verlag, 1969). 某些近期的综述文章如下所列:

R. Bohme, "New Results on the Classical Problem of Plateau on the Existence on Many Solutions," *Séminaire Bourbaki* 579 (1981—1982).

A. Tromba, "On the Number of Simply Connected Minimal Surfaces Spanning a Curve," *Memoires of the American Mathematical Society* 12, 194 (1977).

W. Meeks, "Lectures on Plateau's Problem," *Escola de Geometria Differencial* (Univ. Fed. de Ceará, 1978).

M. Struwe, *Plateau's Problem and the Calculus of Variations* (Princeton University Press, Princeton 1988).

F. Jost, *Two-dimensional Geometric Variational Problems* (New York: Wiley, 1991).

A. T. Fomenko and A. A. Tuzhilin, *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-dimensional Space* (American Mathematical Society Translations, vol. 93, 1991).

L. Simon, *Lectures on Measure Theory* (Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, 1984).

我们忽略了与正规构型——诸如马赛克、贴面砖、蜜巢图样、球堆等等——理论密切相关的最优性的征状. 这个颇具魅力的领域包含许多奇异问题，其中许多问题尚未解决. 幸运的是，我们可提及一篇出色的陈述：L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren* (Leipzig: Teubner, 1965),而今可得到其英译本.

关于蜂窝的最优性，参见 L. Fejes Tóth, "What the Bees Know and What They Do Not Know," *Bulletin of the American Mathematical Society* 70 (1064):467 — 481.

文献资料取自：

J. C. C. Nitsche, "Plateau's Problems and Their Modern Ramifications," *American Mathematical Monthly* 81(1974):945—698.

G. van der Mensbrugge, "Joseph Antoine Ferdinand Plateau," *Annuaire Academie Royale Science Bruxelles* 51(1885):389—473.

讨论极小曲面、肥皂泡和其他最优结构及其在建筑学上的应用的文献如下：

Zugbeanspruchte Konstruktionen, Frei Otto, ed., two volumes (Frankfurt, Berlin: Ullstein Fachverlag, 1962 and 1966; an English translation is available).

Ludwig Glaeser, *The Work of Frei Otto* (New York: The Museum of Modern Art, 1972).

Frei Otto and collaborators, *Natürliche Konstruktionen* (Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt, 1982).

最后一本书包含一份精选的相关文献目录.

Peter Pierce, *Structure in Nature Is a Strategy for Design*

(Chatsworth, Calif.: Synestructics, 1978).
强调了结晶学观点.

第6章

等周问题的经典著作是

W. Blaschke, *Kreis und Kugel* (Berlin: W. de Gruyter, 1916; and later editions).

关于等周问题之结论的评述可在下面著作里找到:

T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin: Springer, 1934; reprinted by Chelsea Publications, New York, 1948).

对于典型的等周问题相关的现象，在

G. Pólya and G. Szegö, "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics," *Annals of Mathematical Studies*, no. 27 (Princeton University Press, 1951).

这篇有影响的专题论文里予以研讨.

推广了的等周问题的典型实例是这样的命题 —— 具有给定面积的平面区域可以支持最大的沙堆. 此结论与关于具有最大扭矩的柱体之横截面的命题由下面的文献证明:

J. Leavitt and P. Unger, "Circle Supports of Largest Sand Pile," *Communications on Pure and Applied Mathematics* 15 (1962):35—37.

下面的著作描述毛细现象的实验:

J. Plateau, *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires*, two volumes (Paris: Gauthier Villars, 1873).

G. Bakker, *Kapillarität und Oberflächenspannung, Handbuch der Physik*, vol.6 (Akademie Verlagsgesellschaft, 1928).

"在宇宙飞船里如何沐浴"一节里所描述的一些结论可在如下著作里找到:

P. Concus and R. Finn, "On Capillary Free Surfaces in the

Absence of Gravity," *Acta Mathematica* 132 (1974): 177—198.

P. Concus and R. Finn, "On the Behavior of a Capillary Surface in a Wedge," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 64 (1969): 292—299.

J. E. McDonald, "The Shape of Raindrops," *Scientific American* (February 1954:64—68).

对于"行星、转动液滴和原子核"一节，我们提及：

J. L. Tassoul, *Theory of Rotating Stars* (Princeton University Press, 1978).

S. Chandrasekhar, "Ellipsoidal Figures of Equilibrium: An Historical Account," *Communications on Pure and Applied Mathematics* 20 (1967): 251—265; and *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (New Haven and London: 1969).

L. Lichtenstein, *Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung* (Leipzig: S. Hirzel, 1923).

L. Lichtenstein, *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* (Berlin: Springer, 1933).

W. S. Jardetzky, *Theory of Figures of Celestial Bodies* (New York: Interscience, 1959).

W. J. Swiatecki, *The Rotating, Charged, or Gravitating Liquid Drop, and Problems in Nuclear Physics and Astronomy*, International Colloquium on Drops and Bubbles, Pasadena, August 28—30, 1974 (University of California, Lawrence Berkeley Laboratory, LBL-3363).

T. G. Wang, R. Tagg, L. Cammack, and A. Croonquist, *Nonaxisymmetric Shapes of a Rotating Drop in an Immiscible System* (Pasadena, Calif.: Jet Propulsion Laboratory).

至于"龟裂和缝隙"一节，参见：

L. I. Hewes, "A Theory of Surface Cracks in Mud and Lava and Resulting Geometrical Relations," *American Journal of Science* 246 (1948): 138—149.

R. Willden and D. R. Mabey, "Giant Desiccation Fissures on the Black Rock and Smoke Creek Deserts, Nevada," *Science* 133 (1961): 1359—1360.

A. L. Washburn, "Classification of Patterned Ground and Review of Suggested Origins," *Bulletin of the Geological Society of America* 67 (1966): 823—866.

J. T. Neal and W. S. Motts, "Recent Geomorphic Changes in Playas of the Western United States," *The Journal of Geology* 75 (1967): 611—625.

J. T. Neal, A. M. Langer, and P. F. Kerr, "Giant Desiccation Polygons of Great Basin Playas," *Bulletin of the Geological Society of America* 79 (1968): 69—90.

D. E. Derfoot, "Thermal Contraction Cracks in an Arctic Tundra Environment," *Artic* 25 (1972): 142—150.

而"晶体几何学"一节，参见：

P. Curie, "Sur la formation des cristaux et sur les constantes capillaires de leurs differentes faces," *Bulletin de la Société de Minéralogistes Francais* 8 (1885): 145.

G. Wulff, "Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Auflosung der Krystallflächen," *Zeitschrift für Krystallographie* 53 (1914): 171—177.

M. von Laue, "Der Wulffsche Satz für die Gleichgewichtsform von Kristallen," *Zeitschrift für Kristallographie* 105 (1943): 124—133.

A. Dinghas, "Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen," *Zeitschrift für Kristallographie* 105 (1944): 304—314.

C. Herring, "Some Theorems on the Free Energies of Crystal Surfaces," *Physical Review* 82 (1951): 87—93.

J. E. Taylor, "Existence and Structure of Solutions to a Class

of Nonelliptic Variational Problems," *Symposia Mathematica* 14 (1974): 499—508, Istituto Nazionale di Alti Matematica.

跋文

对于19世纪力学、数学物理和狭义相对论的发展情况的最好评述是

Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, two volumes (Berlin: Springer, 1926; 1927). This is available in English as *The Development of Mathematics in the Nineteenth Century* (Brookline, Mass.: Math Sci. Pres, 1979).

进一步参考读物有：

J. L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, two volumes, 2d ed. (Paris: 1811; 1815).

C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, 2d ed. (Berlin. G. Reimer, 1884).

H. Poincaré, "Sur la problème des trois corps et les équations de la dynamique: Mémoire couronné du prix de S. M. le Roi Oscar II," *Acta Mathematica* 13, 1—27 (1889).

关于相对论，参见

A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (Princeton University Press, 1922; many reprints).

H. Weyl, *Space, Time, Matter* (Dover, 1922), translation from the German.

R. W. Clark, *Einstein: The Life and Times* (Avon Books, 1972).

C. Lanczos, *The Einstein Decade*, 1905—1915 (Academic Press, 1974).

至于牛顿，参见第一章的参考文献。对于胡克与牛顿之间在科学上的相互关系，下文作了有趣的讨论：

M. Nauenberg, "Hooke, Orbital Motion for Central Forces, and Newton's Principia," *Am. T. Phys.* 62(4)(April 1994): 331—350.

引文之出处

第vi页和第vii页

Translation by Helen and Hans Lewy from the German original "Korf's Verzauberung," which appeared in Christian Morgenstern, Palmström (Berlin: Verlag von Bruno Cassirer, 1922).

第xi页

Jonathan Swift, Gulliver's Travels into Several Remote Nations of the World, Chapter 3: "A Voyage to Laputa, Balnibarbi, Luggnagg, Glubbdubdrib and Japan" (first published in 1726).

第3页和第48页

Aristotle, Kleinere Schriften Zur Physik und Metaphysik, P. Gohlke and F. Schöningh, eds. (Paderborn, 1957), p. 124.

第12页

Arthur Waley's translation of Hsüan-Tsang's Chinese translation (about A. D. 660) of the Sanskrit Mahaprajñāpāramitā Sūtra; from Buddhist Texts through the Ages, E. Conze, ed. (Oxford: Bruno Cassirer, 1954).

第16页

Albert Einstein, "On the Generalized Theory of Gravitation," Scientific American, April 1950.

第17页

P. A. M. Dirac, "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature," Scientific American, May 1963.

第19页

The Dante quotation is from an essay by R. W. Leonhardt in Die Zeit, March 1963.

第20页,第21页和第35页

Pierre Louis Moreau de Maupertuis, "Le Lois du Mouvement et du Repos Déduites d'un Principe de Métaphysique." Mémoires de l'Académie de Berlin, 1746.

第24—26页

Voltaire, Candide or Optimism, John Butt, trans. (New York: Penguin, 1978).

第41页

Gauss quoting Shakespeare in "W. Sartorius v. Waltershausen," Gauss zum Gedächtnis (Leipzig: Hirzel, 1856).

第65页

Johannes Kepler, Harmonice Mundi (1619) as translated by M. Kline in Mathematics and the Physical World (New York: Thomas Y. Crowell, 1951).

第83页

G. H. Hardy, A Mathematician's Apology (Cambridge University Press, 1977), pp. 139—141.

第85页

Dorothy L. Sayers, Have His Carcase, Chapter 31: "The Evidence of the Haberdasher's Assistant" (New York: Avon Books, 1968), p. 312.

第131页和第226页

Pappus, Collectio, Book 8. Adapted from E. J. Dijksterhuis, Archimedes (Copenhagen: E. Munksgaard, 1956), p. 299.

第141页

Hilaire Belloc, "The Waterbeetle," in Cautionary Verses, illustrated by B. T. B. and Nicolas Bentley (New York: Knopf, 1959).

第148页

Richard Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces (Interscience, 1950).

第159页

Gaston Darboux, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, vol. 1 (Paris 1914), p. 490.

第226页和第227页

D'Arcy W. Thompson, On Growth and Form (Cambridge University Press, 1969), pp. 113, 114, and 115.

第245页

"Vous avez confirmé dans les lieux pleins d'ennui ce que Newton connut sans sortir de chez lui." The quotation is in S. Chandrasekhar, Communications on Pure and Applied Mathematics, 20 (1967) 251—265.

第251—253页

The editor J. T. Bonner wrote in his Introduction to D'Arcy W. Thompson's On Growth and Form (p. vii): "Of its importance there is no doubt, but we must agree with Medawar when he says that its considerable influence has been intangible and indirect." The long quotation on p. 252 is from p. 11 of On Growth and Form.

第280—283页

Isaac Newton, Principia, 3d ed. (London, 1726), pp. 13—14. The Newton quotation is from A. Berry, A Short History of Astronomy (London: John Murray, 1898), p. 245. Also the Leibniz and Lagrange passages are quoted from A. Berry, pp. 241—244.

第294页

Newton's letter to the theologian Richard Bentley is from The Correspondence of Issac Newton, vol. 3 (1688-1694), edited by H. W. Turnbull (Cambridge University Press), pp. 253—256.

第301页

The Eddington quote is from R. W. Clark, Einstein: The Life and Times (Avon Books, 1972).

第301—303页

Max Planck. Akademie-Ansprachen (Berlin: Akademie-Verlag, 1948) pp. 41—48 and p. 153.

插图之出处

第 xiv 页和第 2 页上

Institut für wissenschaftliche Fotografie, Schloss Weissenstein, Manfred P. Kage.

第 2 页下

Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.

第 3 页上

Institut für wissenschaftliche Fotografie, Schloss Weissenstein, Manfred P. Kage.

第 3 页左下

Institut für leichte Flächentragwerke. Stuttgart. Thomas Braun.

第 3 页右下

Eric Pitts.

第 5 页和第 6 页

Institut für leichte Flächentragwerke. Stuttgart. H. C. Heubeck. K. Bach.

第 8 页

Institut für leichte Flächentragwerke. Stuttgart

第 8 页上，第 9 页和第 10 页

Institut für wissenschaftliche Fotografie. Schloss Weissenstein. Manfred P. Kage.

第 11 页上和第 12 页

Milton van Dyke. An Album of Fluid Motion. The Parabolic Press, Stanford 1982. Photographs by Sadatoshi Taneda (p. 11) and Magarvey & Latchy (p. 12).

第 13 页上

Photograph by Michael Meier, Bonn.

第 13 页下

Lick Observatory, California.

第 14 页

Institut für leichte Flächentragwerke. Stuttgart.

第 15 页

Institut für wissenschaftliche Fotografie, Schloss Weissenstein. Manfred P. Kage.

第 22 页

Herzog-Anton-Ulrich Museum. Braunschweig, Museumsfoto. B. P. Keiser.

第 24 页

Candide. Voltaire, translated by Lowell Blair. Bantam Books.

第 27—29 页

Universitätsbibliothek. Basel.

第 30 页下和第 56 页

Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek. Göttingen.

第 38 页下

Universitätsbibliothek. Leipzig.

第 39 页

Forschungs-und Landesbibliothek Gotha, Schloss Friedenstein.

第 40 页

Museo Archeologico Nazionale di Napoli.

第 43 页

Mademoiselle M. Houvet. Chartres.

第 47 页

Lick Observatory

第 58 页

Munich Planetarium.

第 59 页下，第 60 页右和第 63 页

Universitätsbibliothek. Leipzig.

第 60 页下和第 61 页下

Universitätsbibliothek. Basel.

第 65 页

Bayerische Staatsbibliothek, München.

第 68 页

Hamburger Kunsthalle. Photograph by Elke Walford.

第 70 页

Biblioteca Apostolica Vaticana, Codex Vergilii Romanus, Nr. 3867.

第 71 页

Universitätsbibliothek, Bonn.

第 82 页

Städtische Galerie, Liebieghaus, Frankfurt am Main.

第 84 页

Öffentliche Kunstsammlung. Basel. Photograph by Hans Hinz.

第 87 页下

Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek. Göttingen.

第 89 页下

Konrad Jacobs, Erlangen

第 104 页上和第 106 页

Klaus Vollmer, Das Steinerproblem auf der Euklidischen Ebene. Diplomarbeit, Bonn 1991.

第 105 页

Institut für leichte Flächentragwerke. Stuttgart. Photographs by B. Winkel and J. Kern (Studienarbeit 2/1985 TU Stuttgart).

第 107 页第 108 页

B. Korte. Mathematics. Reality, and Aesthetics: A Picture Set on VLSI Chip Design. Springer-Verlag Heidelberg, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik der Universität Bonn.

第 119 页

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen.

第 124 页

Bancroft Library. University of California, Berkeley. We thank Michael Nauenberg for pointing out this illustration for us.

第 131 页上

Universitätsbibliothek, Heidelberg

第133页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart.

第141页上和第142页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Frei Otto, Klaus Bach.

第141页下

Drawing by B. T. B. and Nicolas Bentley (from Hilaire Belloc, "The Waterbeetle," in Cautionary Verses. New York: Knopf, 1959).

第144页

The Metropolitan Museum of Art, New York.

第146页

Universitäts-bibliothek, Bonn.

第147页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Klaus Bach.

第148页

©1942 LIFE Magazine.

第157页上

Möbius Strip II 1963, by M. C. Escher. Escher Foundation, Haags Gemeentemuseum, The Hague.

第159页

Konrad Jacobs, Erlangen.

第160页

Department of Mathematics, Columbus, Ohio.

第159页、第162页和第170页

Ortwin Wohlrab, Bonn.

第176页和第177页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Professor Frei Otto.

第179页、第180页和第186页左上

Ortwin Wohlrab, Bonn.

第183页上、左，第185页下，左图第191页。

M. L. Bongart, Zur numerischen Behandlung von Fadenproblemen. Diplomarbeit, Bonn 1995.

第184页，第187页左和第189页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Klaus Bach.

第188页

Eric Pitts, Kodak, London.

第190页

Albrecht Köster, Bonn.

第192页和第193页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Frei Otto.

第194页和第195页照片

Mathematisches Institut, Düsseldorf. Klaus Steffen.

第196页

Eric Pitts, Kodak, London

第199页

Ortwin Wohlrab, Bonn.

第200页和第201页

Alan Schoen.

第202页下，第203页右，第204页上，第205页下，第207—209页，第210页下，第211页，第222页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. Frei Otto.

第212页

Museen der Stadt Köln, Schnütgen-Museum. Photo: Rheinisches Bildarchiv.

第224页和第229页左

Tom Noddy (photographs by Bill Reynolds, Santa Cruz).

第225页，第228页，第229页右和第230—233页

Institut für leichte Flächentragwerke, Stuttgart. H. C. Heinbeck, K. Bach, Th. Braun.

第234页和第235页上

David Hoffman and James T. Hoffman, Amherst.

第239页

Paul Concus and Robert Finn.

第242页

Lick Observatory, California.

第242页和第246页

Hale Observatories, California.

第249页上

After C. V. Boys.

第249页下

After T. G. Wang.

第252页

After D'Arcy Thompson.

第256页上和第258页

Institut für wissenschaftliche Fotografie, Schloss Weissenstein, Manfred P. Kage.

第257页下（图C）

W. Schuh, Bonn.

第260页

After Derfoot, "Thermal Construction Cracks...." Arte 25 (1972): 142—150.

第262页和第264页上

Steven Smale

第263页

Egbert Brieskorn

第268页

National Portrait Gallery, London.

第278页

Emil A. Fellman

第282页

After JPL, Pasadena.

第283页和第285页

Lick Observatory, California.

第284页和第285页

Lick Observatory, California.

第300页

Hebrew University, Jerusalem.

索引

(注：斜体数字指图注所在页之页码；带有字母"n"的数字指脚注所在页之页码。)

译后记："悭吝"宇宙不"小器"

描摹大自然，科学和艺术乃得其美学精华。本书展示了宇宙万物的形态美和造型美：大自然的绚烂瑰丽，科学的最优化原则及其数学结构的简洁美妙，被表述得淋漓尽致。实际上，对宇宙中形形色色优美图像的充分研究，离不开数学家的艺术直觉；他们把几何学看作科学与艺术的一种简单明快的交接形式。本书著者——两位数学家，对变分法——本书之主题作了详尽的几何学诠释。变分原理似乎揭示了宇宙的悭吝本性，其实不然。自然现象五彩纷呈，宇宙万物变化无穷；其几何描绘的美学意蕴以及万物变化所遵循的种种规律等，皆源自这条基本原理。科学和艺术的广敛涵容，恰恰显示了宇宙的魂魄大器和瑰美禀赋。

（一）

著者所谓宇宙"悭吝"（parsimonious），意指自然界里的一切运动变化都遵循最大可能的经济原则，即总是使作用量降到最小。这便是最小作用量原理；它被人们看作主宰一切自然现象的普遍原理。最早论及此原理的科学家之一是法国的莫佩督，他通过北极考察证实了牛顿学说关于地球形状的论断，从而享誉全欧洲。牛顿的动力学理论、牛顿和莱布尼兹创立的微积分学，是最小作用量原理的根基；诚然，牛顿的旷世名著《自然哲学的数学原理》问世是在莫佩蒂阐述其原理之前。正如本书第1章所论："哲学的，数学的和物理学的概念……合并成宇宙的一个集中体现于最小作用量的巨大模式"；此说言简而意赅。无疑，莱布尼兹的"先定和谐"这个哲学观念影响了一些数学家和物理学家。欧拉和拉格朗日等人因之而发展了作用量原理的完善表述，完满变分法赋予表述以严密、符合逻辑的数学形式。变分法在力学中扩展，从伯努利、拉格朗日到后来的哈密顿，他们所建立的分析力学正就是用变分形式改变牛顿力学表述体系的产物。那么，牛顿的《原理》一书的成功撰著，促使最小作用量原理的含义、功效以至科学地位被人们全面地认识；牛顿力学的圆满建树，致使该原理有了牢靠的理论基础。

物质系统之运动过程的作用量为最小，相应地其变分为零，故而最小作用量原理与变分原理是一致的，二者实为同一条原理的不同陈述。或许可以说，此原理恰是物理学的一根主心骨。它不仅适用于牛顿的经典力学，在相对论动力学、量子力学中同样成立；并不仅适用于力学，在超出力学的范畴里同样成立。考察任何物质系统，往往以最小作用量原理为出发点，通过变分运算而导出运动方程以表示系统的运动规律。所以，变分原理还可谓物理学中的一条至关重要

的方法论原则. 本书提供了对此数学方法的生动描述；对于物理学研究而言，这描述颇有激发研究者使用此方法之兴趣的作用. 况且，本书是从哲学高度上剖解"悭吝宇宙"的本性乃至变分法的认识论依据的.

（二）

著者问："为什么蛋有蛋形，鱼有鱼形？"为什么宇宙万物的形状各异不同的对称性？圆形和圆球形是二维图形和三维立体中对称性最高的形态；故而这样的基本形态一而再、再而三地出现，充斥于自然界的一切领域. 例如，行星和恒星都形似圆球（或椭球），行星沿圆形（或椭圆形）轨道绕恒星运转. 大至天体，小至生物细胞以及构成一切物质的原子、原子核，都近乎是圆球体. 何故如此？本书说明：一定周长的各种平面图形中，圆面积最大（换言之，一定面积的各种平面图形中，圆的周长最小）；一定表面积的各种立体中，球体积最大（换言之，一定体积的各种立体中，球的表面积最小）. 圆和球便是所谓等周长问题和等表面积问题的（形态）解. 这两个问题很早为人们所知，传说公元前9世纪黛朵女王因明白等周长问题的结果而获利甚巨（见第2章）. 一般说来，由变分原理必然得出：不同物体总趋于各自稳定的最佳形态，此最佳形态总与某些量（几何量或物理量）取极值（极大值或极小值）相关联. 这就是本书着力阐解的一个科学概念——最优性.

最优化，是近代数学的某些分支学科(例如运筹学)的主要课题之一，旨在使研究对象趋于圆满、完美、和谐. 著者认为，"数学是人类文化的一个必要部分". 数学中讨论最优化原则，实行最优设计，从而达到最佳境界；这正是人类文化底蕴的精粹，人类文明建设的目标. 实际上，这最优设计，在方法、手段、消耗上最简捷、最经济，在效果、作用、收益上最圆满、最充分，而计算极值和推断获取极值的条件，便是变分法之所能；故变分原理恰是研究最优性、实现最优化的重要根据.

"数学王子"高斯把数学称为"自然科学的女王"；物理学大师爱因斯坦则认为数学的简单性为科学真理探索提供以可靠的源泉. 他也崇尚最优化原则，终生致力于构建一个基于最简单的逻辑前提、具有高度对称性和完全同一性的优美的理论物理体系. 他的狭义相对论和广义相对论都符合变分原理，而整个相对论理论体系本是立足于时间－空间同一的观念、以及运动方程满足时空变换不变性这条含义明确的几何学原理. 变分原理正可通过时空几何的变换不变性得以更直观地显露. 跋文中描述引力场中的时空弯曲，光和粒子在此四维弯曲空间里的运动轨迹是弯曲的短程线；这与第3章所分析的最短路径和最速降线等极值问题，从所涉及之变分法的几何意义而言，乃是相通的. 正如著者所述："变分原理将几何学与物理学统一起来"；而且，

该原理在物理学中得到更为生动和深层次的体现．其实，"动力学就是四维世界里的几何学"．广义相对论乃经典物理学中最圆满、最精深的动力学理论，其中变分原理被表述成更对称、更完美的形式；由此而论，人们将这理论称作"几何动力学"，看来是不无深意的．

本书浓墨重彩描绘的是各种物体的平衡态，即静力学条件下的形态和造型．保守力场中的静止物体，其势能取极值时，便处于稳定平衡态或非稳平衡态．物体的与表面积成正比的表面能为极小时，其表面便是极小曲面．书中以不少篇幅讨论肥皂泡和肥皂膜，由以求解普拉蒂奥问题，即探求张成给定闭合曲线的极小曲面，并进而从事最优设计．道格拉斯求出许多广义普拉蒂奥问题的极小曲面解，从而获得首次颁发的菲尔兹数学奖．极小曲面的形状多种多样，大部分是数学领域里的著名曲面，但也不尽然．书中精致地绘出的一些没有自由边界和带有一段自由边界的极小曲面，确实逗人喜爱．

本书指出，凭藉最小作用量原理，从一切虚拟的（即可能的）运动中拣选出真实运动；凭藉虚功原理，从一切虚拟的(即可能的)位置中拣选出稳定的静止位置；"这表明作用量原理与虚功原理有同样的本质，前者支配非稳过程，后者标定静止状态"．此乃理所当然，动力学和静力学是牛顿学说的双翼，二者均植根于变分原理，得力于变分运算法则；著者对此是特别强调的．

（二）

最佳形态，因其对称优美而使人赏心悦目．希腊神话里的命运女神脚踩圆球，嬉耍欢乐，球形是其灵动、幸运的象征．高大的拱门和哥德式圆顶教堂（如罗马的万神殿等）有一种浑然庄重的气势．五个柏拉图立体曾经被用来解释宇宙的结构；虽然此解释被近代科学理论所否定，但这些立体美观、齐整，一个个精巧地套合着，从中可领会古代学者对于宇宙具有对称性结构的猜测和向往．然而有的立体构型却在矿石晶体中出现，只是晶体对称性远较柏拉图立体丰富．珍贵的宝石之所以会辉光四射、异彩竞放，就在于这奇特无比的晶体对称性．

诚然，对称性最高的圆形和圆球形不可能是宇宙万物的唯一形态．本书表明，世界乃共同规则性和多样性的统一．有几十种不同的晶体对称性，便是其规则性与多样性相统一的典型例证．再则，物体运动除有圆形、椭圆形轨道外，其他圆锥曲线（如双曲线、抛物线等）以及圆锥曲线的组合（如摆线等）亦是天体和地面物体在不同形式的作用力场里以及在不同条件下的运动轨迹．种种轨迹变化多端，但都有一定的规则性和不同的对称性．至于拓扑型不同的各种极小曲面也都有各自的对称性．回转曲面、螺旋面等所具有的回旋对称性使这些曲面既显得玄妙，又并非不可捉摸．所谓的怪物曲面虽然有些怪诞，其拓扑型却与最简单的圆盘面（但带有无限多手柄）相同，并由此清晰地显示了数学中的极限概念以及无限寓于有限之中的思想．

变分原理使世界模式最优化，其对称、和谐和神奇、奥妙给人以美的享受；不仅如此，交织一起的经济原则还使人类获得最大程度的实际利益。例如，圆顶建筑散热量较少；沿最速降线降落最为省时；按最短联线系统布置电话线，各种管道和修筑交通路径，全都能节省费用，提高实用效率。又如在慕尼黑举行的奥林匹克运动会所使用的运动场、体育场、游泳池等建筑，都采用帐篷式的屋顶结构，屋顶均为极小曲面薄膜。这样的建筑省料、轻盈、搬动方便；虽然在运动会结束之后并未立即拆除迁移。看来，讲究经济实惠与追求完美和谐往往连在一起：人类从大自然得到的是精神、物质双重收益，并且二者都尽可能达到圆满的水准。那么可以说，宇宙遵循变分原理，受益的终究是人类；对于人们而言，宇宙算不得不慷慨大方。

再从物理学意义上解释一下运动变化的规则性和多样性。人们认定，自然界以物质性为第一性。用物理学语言来说，宇宙万物无不具有质量和能量；按照爱因斯坦的观点，质量和能量是相等价的物理量。其实，能量（或质量）是任何物质系统最基本的量；变分法的立足点正在于此。哈密顿量以及相应的拉格朗日量表示物质系统的能量状况，亦反映所考察系统与其他物质的相互作用；由此出发计算作用量及其变分，从而导出该系统在所处相互作用场里的运动方程。因此，任何物质系统的运动规律都有相同的数学源头；这正如前述爱因斯坦所谓的：可到数学的简单性中寻觅各种具体的运动规律。变分原理和变分运算法则确实是宇宙总体不同物质运动规律之统一模式的主杆，如此便体现了运动变化的共同规则性。本书虽然重在对变分原理作几何学诠释，但同时在将几何学与物理学相结合的阐述中点明了变分原理的物理学意义。尽管共同的数学规则乃势在必然，但不同物质系统之哈密顿量或拉格朗日量的具体表示形式各有差别，由以导出的具体运动规律也就迥然相异；物理现象及其运动规律所表现出的千差万别又乃起因于具有相同数学源头的不同的物理内容。物质运动的共同规则性和多样性的统一，则就构成蔚然壮观的物理学大厦；它像雄伟的罗马万神殿，像中国无数的宝塔、庙堂和皇宫大殿，但蕴藏着物理内容无穷无尽。然而这些十分规则、气派、美观的建筑物恰可喻作物理学各理论体系所依托的变分法框架。

千姿万势的物质形态、千型万式的物质结构、千变万化的物质运动、千差万别的运动规律，却遵循着同一条数学规则。此可谓大自然之造化神功。宇宙展露出丰富多采的面貌（包括静止状态和运动规律），美哉、伟哉！人类却可凭藉共同的数学规则去了解这浩瀚无际的大千世界，奇哉、乐哉！宇宙给予人类的很多很多，却让人们轻而易举地驾驭它，真慷慨然也。

（四）

蜂窝结构所费蜂蜡相当节省；有人认为，这是蜜蜂按照"神的指令"，使巢室的表面积为极

小之故。那么，科学家又是如何理解以变分原理为主体的宇宙总体模式之起因的？大数学家欧拉说："整个宇宙的模式最为完善，实系大智大慧的造物主所精心规划过的"。这造物主，有些科学家就将其认作为上帝。本书提及莱布尼兹的"神正论"；该学说的核心观念"先定的和谐"，是近代科学形成时期有代表性的哲学观念之一，其影响颇为深远。不少大科学家，例如开普勒、欧拉等，都接受了这种观念。"神正论"主张："我们的世界被组织成所有可能形式的世界之中最好的一个"，因为"上帝以先定的和谐方式创造了世界"。开普勒在其著作《宇宙和谐论》中热忱地颂扬了上帝；而他的一句名言："上帝这样设计、构造了世界，使它最好、最美、最像上帝自己"，则表明他对上帝无限崇敬之诚意，以及对最佳宇宙模式之遐想。

科学在逐步地发展、不断地完善；当对于自然界的某些现象、某些规律不能穷根究底地解释清楚时，就有科学家去求助于"造物主"、求助于上帝，这与其宣扬之带有神学色彩的和谐论哲学观念紧密相连。开普勒、莱布尼兹等正是如此。牛顿的哲学观念与他们不完全相同，他是这样理解最小作用量原理和最大经济原则的："自然界不做无用之事，只要少做一点就成了，多做了却是无用；因为自然界喜欢简单化，而不爱用什么多余的原因去夸耀自己"。牛顿强调简单性，而并不十分着重由上帝"先定的和谐"；尽管他曾鼓吹过"上帝的第一推动力"。简单性原理也是一条基本的自然哲学原理，凡富有哲学素养的物理学家，大多追求物质形态的稳定、运动过程的简捷，并崇尚理论体系的简洁和清纯。简单化成了牛顿自然哲学的重要准则；可包容最小作用量及其变分原理的牛顿动力学理论，恰是简单性这一自然哲学观念的伟大结晶。以此而论，变分原理是简单性原理的数学显示。

当然，和谐并非由上帝"先定"；但理论体系的对称与和谐以及藉此去描绘宇宙模式和世界图像的优美与和谐，毕竟是大部分科学家为之奋斗的崇高目标，爱因斯坦便是为实现此崇高目标而奋斗不息的光辉典范。他将物质世界当作一个整体来研究，谋求建立一个有统一表述的物理学总体理论；他以简单性和同一性作为对理论体系之逻辑前提的根本要求。由对简单性前提的追求，会导致方法的经济原则；并结合以同一性要求，就自然地使理论总体贯穿以变分原理这样，可望构建成具有高度对称性的统一理论，使物理学向优美、和谐的意境升华。在爱因斯坦的理论探索中，哲学上的简单性原理，通过方法的经济原则，最终归之于科学美学原理。简单、经济与对称、优美相连通，理论之和谐乃是科学建树之最优化结果。

世界本来是和谐的，才可能建立描摹它的和谐的科学理论。这是自爱因斯坦前后时期以来的一批理论物理学家，对物质世界的基本认识和对理论构建所定的终极标准。实际上，这终究是一种哲学观念：和谐乃大自然的禀性，但并非上帝的创造；对于人们的科学探索而言，依然可称其为"先定的和谐"，抑或称作"内禀的和谐"，似更适当一些。宇宙的和谐禀性恰与其所

谓的"悭吝本性"相对应；甚至可说，因其后者，才有其前者．任何物质形态"都按照极大极小的原则而发生"(欧拉语)，任何运动规律都受制于变分原理．如此才形成一个和谐统一的宇宙总体模式．

反过来说，从和谐禀性出发考虑，势必引向对变分原理的探讨．宇宙既然和谐，其中物质形态理当趋于平衡、趋于稳定，运动形式亦当趋于稳定、趋于简捷，那么一些几何量或物理量取极值、作用量为最小(或稳定)便是合乎逻辑的推论．因此，变分法探讨源自于和谐论哲学观念，对宇宙之和谐禀性的认识必定导致对宇宙之"悭吝本性"的揭示；这两种性状相辅而相成．况且如前文所述，宇宙既然和谐、多采、美好，就谈不上"小器"；所谓"悭吝"者，无非是宇宙万物及其运动变化遵循变分原理、服从方法的经济原则的一种形象化说法罢了．

又因为遵循的是同一条原理，宇宙的任何物质系统，无论从其外观形态上看，还是从其运动规律所满足的时空变换和其他各种变换的不变性上看，都呈现出无比美妙的对称性；和谐的宇宙正以各种不同形式的对称性为其背景．物理学中所探索的物质世界之对称性及其破缺的理论课题，可与上文说明的规则性和多样性问题作对照；物理理论之美学蕴含主要就通过此类课题得以阐发，而变分原理正是这美学蕴含的聚集点．宇宙有臻美禀赋，物理学等学科恰可通过对变分法这一条几何学原理的具体研究，将宇宙的对称之美、和谐之美，描摹得非常精致．本书以变分原理为主题，则就把对于几何学、物理学、自然科学的若干论述，推向自然哲学、科学美学的一定高度．译者鉴于本书的参考价值和其主题的深刻含意，特撰此后记，以述阅读本书的一二体会．

（五）

本书内容丰富、主题明确、行文洒脱、通俗生动．而插图共为精美，尤其引人注目．并富有人文气息和哲学、博物学风采，引用了数量可观的科学史、哲学、博物学、文学等多方面的名著名篇以及著名学者演讲中的精采片段．由此可得见著者的博学多才．但个别叙述数学证明的段落不够简洁洗练，似有累赘冗沓之感；译者当然不便擅自删改，仅在此附带提一句．译文中亦必颇多不当之处，恳请读者指正．

译　者

撰识于同济大学瑞安楼

2002年6月